2014 年 7 月 9 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 12

お知らせ

- ただいま「授業評価アンケート」を実施しています.「Tokyo Tech Portal メニュー/授業評価【Course Evaluation】」からご回答ください（いまここでやっていただくのが良いです）. 回答数が少ないとこの科目の「中の人 ()」の機嫌が悪くなり，採点に影響するかもしれません．参考：学部生はポータルにログインして回答する場合と携帯電話用のサイト（https://jhm.gakumu.titech.ac.jp/titfd/）にログインして回答する場合で学籍番号の入れ方及びパスワードが異なりますのでご注意ください。
- 中間試験答案は数学事務室にて絶賛返却中です.

前回までの訂正

- 3 重積分を累次積分に書き直す方法は 3 通りと言いましたが，6 通りではないか，というコメントが複数ありました．おっしゃるとおりです.

授業に関する御意見

- ヌベヂョンヌゾジョンベルミッティスモゲロンボョ wwww キェェェェェェ wwwww
  山田のコメント： 手間かけさせやがって...
- 闇...　**山田のコメント：** ですかね.
- 提出物の点とテストの点を単純に足したものが中間試験の点数となるのでしょうか.
  山田のコメント： なぜ足さなければいけないの? 中間試験の点数は中間試験の点数です.
- 後期の微積の授業も山田光太郎先生ですか?　**山田のコメント：** 特別何かが起こらなければそうです（ごめんなさい).
- 試験室入ったときヤバかったので「やばいっす」と書いたものの，直前に隣の人が精神統一のために持ち込用紙に「いけるよ!」って書いてたので真似したらこんなことになりました.　**山田のコメント：** ネタをありがとう.
- 今日出てきた変態はそこまで変態に感じませんでした．変態度が低いということでしょうか? 先生は以前自分のことを変態と言っていましたが，変態度は高いですか? 低いですか?
  山田のコメント： 測り方によるのでは? 変態度が高くても，慣れれば大丈夫（何が).
- ああ寒い．一枚着ても ああ寒い.　**山田のコメント：** 場所を選んだらどうでしょう.
- 中間試験の解き直しがんばります.　**山田のコメント：** そうして下さい.
- 中間試験があると期末一発の場合よりも自分の現状が良く分かり，対策を立てやすいです.　**山田のコメント：** そうですよね.
- 中間で色々わからされたので，質問用紙の提出をがんばります.　**山田のコメント：** ぜひどうぞ

質問と回答

質問： 冒頭の「あなたは地球の表面の何 % 一度に眺められるか」という問題は $\frac{\delta}{2(R+\delta)}\times 100\%$ より $1.5625\times 10^{-5}\%$ で合ってますか? あとこの問題は中学の数学の範囲で解けますよね.

お答え： 中学の数学の範囲で解くにはどうしたらよいでしょう．説明希望.

質問： 今回の授業の最後で先生がお話くださった半径 R の球の北極から半径 r の球面の面積については理解できましたが，最初で問題となっていた，北極点より s (原文ママ：板書は δ だった）だけ宙に浮いたところから球を見たときに見える球面の面積はどうすれば求まりますか? （以下略）

お答え： 半径 r の円の（球面上の）面積が $4\pi R^2\sin^2\frac{r}{2R}$ であることを認めれば r を求めればよいことになりますが,

$$r = R\theta, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{2\delta R+\delta^2}}{R} = \cos^{-1}\frac{R}{R+\delta}.$$

質問： 曲面の面積を求める際に，球面の微小な一部分の集合と考えて求めた方が微小平行四辺形の集合と考えるよりもより精密に求めることができると思います．しかし，球面の面積を求めるために微小平行四辺形を用いるため，曲面の面積を求めるのにも最初から微小平行四辺形を用いるということですか?

お答え： 曲面を曲面で近似しても，極限をとってしまうと微小平行四辺形で近似したときと同じになってしまう（状況をはっきりさせていませんので）から平行四辺形で考えていると思ってよいです．曲線を近似するのに線分ではなく円弧で近似するとよりよい近似が得られますが，球面でよく近似できない曲面もある（たとえば $x^2 - y^2$ のグラフを想像せよ）ので，球面を使うわけにはいかない，という事情もあります．

質問： リーマン和とはどういう考え方ですか（教科書を読んでもよく分からないので）．授業で少しでいいので触れて下さい． **お答え：**講義ノートの式 (10.1) の右辺の lim の中のこと．

質問： パップス-ギュルダンの定理は今回の範囲で導けますか?/ パップスギュルダンの定理は重積分を用いて証明できますか． **お答え：**問題 11-4 から 11-6.

質問： 11-4 で D を x 軸まわりに一回転して得られた立体の体積は $2\pi \iint_D y\,dx\,dy$ となるとかいてありますが，どのようにしてこの式が得られるのかわかりません．

お答え： D が $\{(x,y) | a \leqq x \leqq b, \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$ というように 2 つの関数のグラフに囲まれた部分なら，高校生が知っていることですね．次回，少しコメントします．

質問： 偏積分と言わないのはなぜですか? **お答え：**重積分は，両方の変数を一度に考えているので「偏」ではない．重積分を累次積分に書き直した時の一段階ごとの積分が偏積分でしょうが，そう言わないのが習慣のようです．

質問： 立体の質量を求めるとき，$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)\,dz$ とあったら $a < b$, $c < d$, $e < f$ となりますよね．

お答え： そうです．一変数関数の積分は「向き」を考えましたが，ここでは向きを考えていませんので．

質問： 講義ノート p 81 の 2 変数関数のグラフの下側の体積は，結局 $|D| = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{D'} dx\,dy \int_0^{f(x,y)} dz = \int_{D'} f(x,y)\,dx\,dy$ ということなので，特に覚えておく必要はないですよね? **お答え：**もちろん．

質問： なぜ，定数関数 $f(x,y) = 1$ を積分するか分からななかったので，10 回の p 75 の面積確定集合のところを読み返しましたが， よく分からないので，分かりやすくおしえてください．

お答え： 定数関数を積分しちゃいけませんか? 一変数関数だって定数関数を積分したでしょう．何を疑問に思っているのか，質問が分かりにくいので，分かりやすく質問して下さい．

質問： 体積密度で，体積確定集合 Ω が質量を $\iint \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ で求める際 ($\rho(x,y,z)\mathrm{kg/m}^2$) の範囲になるのがよく分からないです． **お答え：**ご質問が良く分からないです．「範囲」という語で何を指していますか?

質問： p 82, 下から 7 行目で「負でない」なのはなぜですか? 負だったら $\mathbb{R}^3$ 内の f のグラフの上側と xy 平面で挟まれる部分の体積になるのではと思ったのですが.

お答え： いいえ，その体積にマイナスをつけたものが積分の値．一般に正の値も負の値もとるときは?

質問： p 82 について $\iint_{D'} 4\sqrt{x}\,dx\,dy$ からどのような式を経て 32/15 に至ったのかがわかりません．$y \leqq x - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqq x$ というように計算するのでしょうか．

お答え： というように，のあとどう続けます? $\int_0^1 4\sqrt{x}\,dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} dy$ のように累次積分にできますね．

質問： 重積分の x, y の範囲から定積分の上限と下限を求めるが，いちいち xy 平面に xy 領域を書かなければならないでのでしょうか．図で書くことができない領域が出てきたとき，どうすればよいのでしょうか．

お答え： xy 領域，という語が何をさすか分かりませんが，不等式さえ分かればいいので，図を書かなくてもよいのでは?

質問： 累次積分の範囲の求め方が分かりません．中間試験の問題 C の答えはどうして $\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt[3]{y}}^1 f(x,y)\,dx\right] dy$ にならないのですか．

お答え： 条件「$x^3 \leqq y$ and $y \leqq 1$ and $0 \leqq x \leqq 1$」は条件「$x \leqq \sqrt[3]{y}$, $y \leqq 1$ and $0 \leqq x$」と同値だからです．

質問： xy 平面の部分集合 E (略；中間試験の問題 C) とするとき $\iint_E \frac{x^5 y^2}{(1+x^6)^2}$ をもとめるにあたって $y = f(x)$ のように表して $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で積分したりして求めるという解き方もあると思うんですが，その場合 $y = f(x)$ の形にするにはどうすればいいのでしょうか．良い方法があったら教えて下さい．

お答え： <u>何を</u> $y = f(x)$ の形にすることを考えているのでしょうか．やりたいことが言葉にできていないようですね．

質問： xy 平面上の適当な部分集合 D においての面積が $\iint_D 1\,dx\,dy$ で表される一方，その D 上で，連続な 2 変数関数 $f(x,y)$ のグラフと xy 平面で囲まれた体積は $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ と表されていましたが，どっちも 2 回積分しているのに，面積と体積で次元が違うのは $f(x,y)$ が次元をもっていて 1 が次元をもっていないから，という解釈であっていますか?

お答え： 次元というのは，物理学などでよく使う「次元解析」の意味の次元ですね．あってます．

質問： P 82 の例 11.2 の $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ のグラフと xy 平面で囲まれた体積であるということは分かりますが，中間試験の問題 C の積分（略）はどの部分の体積と説明できますか．$E=$ 略 で示される xy 平面上の領域と $f(x,y)=$ 略 で囲まれた部分の体積ということでよいですか．

お答え： だいたい良い．xy 平面上の集合（この講義で使っている意味での領域ではない）E と $f(x,y)$ のグラフ（$f(x,y)$ ではない）の間の部分の体積．

質問： プリントの例 11.2 の体積を求める問題で，$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$ と x と y について積分だけで体積が求められるのはなぜですか?

お答え： (x,y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ を頂点とする xy 平面上の小さな長方形と f のグラフの間の図形は，底面積 $\Delta x\Delta y$, 高さ $f(x,y)$ の角錐と近い．その体積は $f(x,y)\Delta x\Delta y$ だから，その総和をとって分割を細かくしていくと積分に近づく，ということを口頭で説明した．

質問： 「微小部分の面積，体積の総和」の極限が面積体積であると信じて」とありますが，実際のところは違うのでしょうか． **お答え：** 違いませんが，こう書いた理由は「面積」や「体積」をきちんと定義していないからです．

質問： D の小さな長方形を $[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]$ と表すのは $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ の dx, dy の順番によるものですか．もし $\iint_D f(x,y)\,dy\,dx$ と書かれていたら D は $[y,y+\Delta y]\times[x,x+\Delta x]$ と表すのですか．

お答え： いいえ．直積の順序は $\mathbb{R}^2$ の第一座標，第二座標の順番です．座標の順番は $f(x,y)$ の x と y の順番ですから，ご質問のような状況では x が第一座標なので，最初の書き方にすべきです．

質問： 3 変数の区間 $\{(x,y,z)\,|\,a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d, e\leqq z\leqq f\}\subset\mathbb{R}^3$ は直積で表すことができるのでしょうか? 表せるならば $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ で合っていますか． **お答え：** 合っています．

質問： 重積分においても広義積分は定義できますか．そのとき lim や $\int$ の交換で計算結果は変わらず一定の値に定まるのでしょうか． **お答え：** 前半：14 回に少しコメントします．後半：実はそこが微妙なところ．「ルベーグ積分」という毛色の違った積分の定義が必要となるのはこのことと関係するが，この講義の範囲をはるかにこえる．

質問： 例 11.3 において共通部分の体積というのは $z^2\leqq 4x$ は平面であるため共通部分も平面となるのではないでしょうか． **お答え：** $z^2\leqq 4x$ は平面になるんですか? 授業では違う説明をしたはずですが．

質問： 重積分で x で積分した後 y で積分するという作業は，大学受験のときに $y=t$ と固定し，x で積分し t について積分する作業と同じことですよね．

お答え： 同じこと．その作業のことを「重積分を累次積分に書き換える」といいます（と，講義ノートにありますよね）．

質問： 例 11.2 の問題で $A=a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ とおきかえしてましたが，どうやってそのような置き方を見つけるんですか? 問題によって決まってますか？（おきかえ）

お答え： いくつかの定石はあります．代表的な例は講義ノートなどにあげてあるので良く見るように．その上で置き換えは 10 回か 20 回くらい試行錯誤をやってみれば見つかるはず．

質問： 重積分でどの変数から積分したら楽なのか，見分ける方法は無いですか? 実際計算してみていろいろ試すしかないですか? **お答え：** はい．

質問： $\sqrt{1+\left(\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right)^2}\Delta x\,\Delta y \fallingdotseq \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\Delta x\Delta y$ この近似はなぜして良いのですか?

お答え： 偏微分の定義から $\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は Δx よりもはやく 0 に近づく．

質問： 講義資料 p83 の曲面の面積を求める際は $\iint_D \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dx\,dy$ で求められるとありますが，平面の面積を求める場合 $\iint_D dx\,dy$ で求められることを考えると，$\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}$ は曲面の曲がり具合に由来する係数と考えて良いのでしょうか．

お答え： 定数 A, B に対して $f(x,y)=Ax+By$ $(A,B)\neq(0,0)$ とおくと，$1+(f_x)^2+(f_y)^2$ は 1 にはなりません．f のグラフは平面ですから「曲がり具合」を表しているのではないことがわかります．むしろ「傾き具合」を表しています．

質問： 問題 11-5 で $f(x)$ を $\Delta\theta$ だけ x 軸の周りに回転させたとき，微小区間で（図省略）このように $f(x)\Delta\theta\times\sqrt{1+f'(x)^2}\Delta x$ の長方形の面積を考え θ を 0 から 2π まで積分して Δx を a から b まで積分したと考えてよいのでしょうか．

お答え： そうするとなぜ面積がでるのでしょうか．円錐を薄く切った部分の面積を考えるのがよいと思います．

質問： プリントで積分する前に近似を使っていますが， 面積を積分して体積を計算するときに近似は常に成立するのですか?

お答え： ご質問の意味が分かりません．「近似が成立する」とはどういうことを指しているのですか?

質問： $r=f(\theta)$ の区間 $I=[a,b]$ における曲線の長さは $L=\int_a^b\sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}\,d\theta$ で表せるそうです．曲線の微小な部分の長さ $\varDelta L$ を考えます．$\varDelta L \fallingdotseq \sqrt{(dr)^2+(r\,d\theta)^2}$ と考えているのでしょうか? また，そうすることで $\varDelta L=r\varDelta\theta$ とするより近似の精度が高まるのでしょうか．

お答え： 少々説明がいるようですね．まず「極座標 (r,θ) で $r=f(\theta)$ と表される曲線」ですね．これは直交座標系で書き表すと

$$\bigl(x(\theta),y(\theta)\bigr)=\bigl(f(\theta)\cos\theta,f(\theta)\sin\theta\bigr)$$

とパラメータ θ で表示された曲線とみなせますから，系 9.15 からご質問の式は従います．直接確かめるなら次のように考えればよいでしょう：θ から $\theta+\varDelta\theta$ の区間での 2 点間の距離を $\varDelta L$ とすると

$$\varDelta L^2=\bigl(f(\theta+\varDelta\theta)\cos(\theta+\varDelta\theta)-f(\theta)\cos\theta\bigr)^2+\bigl(f(\theta+\varDelta\theta)\sin(\theta+\varDelta\theta)-f(\theta)\sin\theta\bigr)^2$$

となります．ここで $f(\theta+\varDelta\theta)-f(\theta)=f'(\theta)\varDelta\theta+\varDelta\theta\varepsilon(\varDelta\theta)$ とおくと，f の微分可能性から $\varepsilon(\varDelta\theta)\to 0$ $(\varDelta\theta\to 0)$ が成り立つ．このように $\varDelta\theta\to 0$ のときに 0 に近づく項を捨てた近似式を考えると，捨てた項は，極限をとったときの積分の値に影響をしない．したがって

$$f(\theta+\varDelta\theta)\fallingdotseq f(\theta)+f'(\theta)\varDelta\theta,\quad \cos(\theta+\varDelta\theta)\fallingdotseq -\varDelta\theta\sin\theta,\quad \sin(\theta+\varDelta\theta)\fallingdotseq \varDelta\theta\cos\theta$$

なので，$(\varDelta L)^2\fallingdotseq f'(\theta)^2+f(\theta)^2$ となるので $\varDelta L$ の総和をとって $\varDelta\theta\to 0$ なる極限を考えれば良い．

質問： 密度が積分可能な関数で表されるとは，実際，どのような状況ですか? **お答え：**たとえば密度が連続.

質問： 体積を計算で出す時，立体の図を書いてみるのはだめなことですか? 高校のときさんざん先生に書くなといわれたのにやめられません. **お答え：**書いてもいいんじゃないですか? でもそれだけじゃ計算できないのでは?

質問： 四重積分も概念的に考えることはできますが，幾何学的に理解することは不可能なのでしょうか?

お答え： 「幾何学的に理解する」とはどういうこと？ $\mathbb{R}^4$ の部分集合の 4 次元体積は十分幾何学的な対象なんですが.

質問： アステロイドの置き換え（$x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$）は定石なんですか? **お答え：**たぶん.

質問： アステロイド（略）をなぜ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ と表すのがあまりよろしくないかがわかりませんでした．二乗の形を残した方がいいからですか?

お答え： 授業で二回くらい説明したような気がしますが，非整数乗を考えるのは，底が負でない数のときのみである，というのが高等学校の教科書の流儀で，ここではこれにしたがっているからです．ご質問のように書くと，$x,y\geqq 0$ のときしか意味がない式になります.

質問： アステロイドの面積の計算をする際に「$I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ としたとき $I(n)=\frac{n-1}{n}I(n-2)$」を用いたのですが，これは証明なしで用いてもよいでしょうか.

お答え： いいんじゃないですか? 試験を気にしているなら「証明して欲しいときはそう明示します」.

質問： p. 93〜94. ○ ${}^t(h,k)$ の係数行列が dF or ヤコビ行列であるのはなぜですか．○像の面積を $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\varDelta u\,\varDelta v$ と近似できるのはなぜですか. **お答え：**前半：定義 3.6 と命題 3.11 参照，とありますが，これは見ましたか．後半：(12.4) 式と補題 12.8 からわかる（と書いてある）.

質問： 式 (12.1) で φ が C^1-級でなかったら，u の値で場合分けしたり，定数であれば前に出したりすればいいのですか? **お答え：**C^1-級の区間に分けるわけです．ただ，定数関数は C^∞-級だと思いますが.

質問： 次回の授業で行列をやると言っていましたが，ヤコビアン行列のことでいいんですか?

お答え： ヤコビ行列かヤコビアン（この 2 つは違うもの）です．ヤコビアン行列とはいわないと思います．ちなみに「行列」ではなく「行列式」と言った気がしますが.

質問： 期末の範囲を教えて下さい．あと中間テストの結果はどのように成積に影響するのか詳しく教えて下さい.

お答え： 前半：予告用紙にあるとおり．後半：成積には全く影響しません．成績に影響する可能性は否定できません.

質問： 期末テストの内容は積分がメインになるのでしょうか.

お答え： 予告用紙を見て下さい．成績の付け方（主として定期試験のスコア）から考えて，中間試験の後の部分をメインにする理由があるでしょうか.

質問： 中間試験の解答，解説は配布しないのですか? 自分達で考えてほしいということでしょうか.

お答え： 授業時間に述べましたが，講義 web ページ，OCW に上がっています.

質問： 授業内容が理解しづらい時は参考書を使った方がよろしいでしょうか.

お答え： 参考書によります.

質問： おつかれさまでした ♡

お答え： もちろん!