2014 年 7 月 16 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 13

お知らせ

- 今回が最後の「質問」の受付です．皆様からのご質問は授業にあたって大変役に立ちました．ご協力ありがとうございました．後期に履修する方は，またよろしく．
- **授業評価にご協力お願いいたします**．7 月 13 日 23 時現在で，回答数は 94 名のうち 13 名です．

前回の補足

- ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ となる理由が分からないという方が 2 名．左辺の記号を右辺で**定義**しているので，理由は不要．講義ノート 93 ページでは「記号：... と書き」で「こう書くことにする」と言っている．$\partial(x,y)$ 等の意味がわからない，というご質問も複数．左辺はまとめて一つの語で，分解できません．
- 積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$ を極座標を用いて計算する際に，偏角 θ の動く範囲を $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ としましたが，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の「誤りではないか」という指摘が複数．**誤りではありません**．考えている xy-平面の部分集合と（ほぼ）1 対 1 に対応するために，偏角の動く範囲は「一回り分」とればよいので，θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ でも $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ でも，$-\frac{\pi}{2} \leqq \pi \leqq \frac{3}{2}\pi$ でもよい．どれも同じ答えになることを確かめよ．山田が，$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ を使うのは (1) 0 を区間の端点にしたくない (2) 積分区間が 0 に関して対称だと計算の見通しが良い，が理由．
- テキスト 91 ページ，「... 変数 (x,y) から変数 (u,v) への変換 $\varPhi$ が C^1-級函数により $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ と与えられ」が，(u,v) から (x,y) への変換ではないか，という質問がありました．式は曖昧でないのでどちらでもよいですが，「x, y で書かれた式に代入して u, v で書かれた式に直す」気持ちなら「(x,y) から (u,v) への変数変換」に見えます．式が書かれているので曖昧さはないですね．

前回までの訂正

- 問題 11-5 のコメントで，曲面の方程式を $y^2 + z^2 = f(z)$ と書いたそうです．$y^2 + z^2 = \{f(z)\}^2$ です．
- 講義資料 12，ご意見の 4 行目：提出部 ⇒ 提出物
- 講義ノート 94 ページ，2 から 4 行目：

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\\
&\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u + x_v(a,b)\Delta_v, y(a,b)\bigr),\\
&\bigl(x(a,b), y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u + y_v(a,b)\Delta v\bigr),\\
&\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u + x_v(a,b)\Delta_v, y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u + y_v(a,b)\Delta v\bigr)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{aligned}
&\bigl(x(a,b), y(a,b)\bigr)\\
&\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u, y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u\bigr),\\
&\bigl(x(a,b) + x_v(a,b)\Delta u, y(a,b) + y_v(a,b)\Delta v\bigr),\\
&\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u + x_v(a,b)\Delta v, y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u + y_v(a,b)\Delta v\bigr)
\end{aligned}
$$

- 上にともなって $[a, +\Delta a] \times [b, b+\Delta b]$ に対応する xy-平面上の部分は，上の 4 点を頂点とする四角形に近い．これは平行四辺形で，面積は $|x_u(a,b)y_v(a,b) - x_v(a,b)y_u(a,b)|\Delta u\,\Delta v$ になる．これに関するご質問が 2 件．
- 講義ノート 94 ページ，下から 10 行目：コンパクト集合 ⇒ 面積確定集合（2 箇所）
- 講義ノート 96 ページ，上から 4 行目：$du\,dv \Rightarrow du_1\,du_2 \dots du_n$.
- 講義ノート 96 ページ，下から 2 行目：C^1-級関数 ψ が ⇒ 連続関数 ψ が
- 講義ノート 103 ページ，問題 13-5：問題 (1)–(6) の $\hat{f}(t) \Rightarrow \hat{f}(s)$.

授業に関する御意見

- 期末テストのテスト範囲はプリントの 11 からでしょうか?　**山田のコメント：** 予告文にはなんと書いてありましたか/ 成績をどのようにつけると予告しましたっけ（それからも判断可能).
- 進捗ダメです　**山田のコメント：** me, too.
- 暑くなってきましたね.　**山田のコメント：** はい.
- 夏はこれくらいの室温でちょうどいいと思います.　**山田のコメント：** いろいろですね.
- 今回はサスペンダーなしですか. . . .　**山田のコメント：** 上着がないときはベルトです.
- 写像，どうもよく理解できませんねぇ.　**山田のコメント：** 対応の規則，というごく単純なものなんですけどね．ひねくれて考えすぎていませんか?
- まだ出席人数の単調減少は続いているのでしょうか?　**山田のコメント：** 安定しているようです.
- 最近，石川台も割と近いな. . . と思うようになりました.　**山田のコメント：** 慣れはこわいね.
- 中間を見直したら，問題文を読み違えることで大量に点を失っていました．勿体無いです.
  山田のコメント： ですか．ちゃんと読もうね.

質問と回答

質問： p. 100 補題 13.6 の証明の「単調非減少」は「単調増加」と同じ意味ですか．それとも増減しない場合も含むために「単調非減少」という言葉を使うのでしょうか.

お答え： ごめんなさい．定義したつもりでしたが，していませんでしたね．関数 f が**単調増加**であるとは「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ」，関数 f が**単調非減少**であるとは「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$ が成り立つ」.

質問： P. 102, 注意 13.11 $\int e^{-x^2}\,dx$ は多重積分でない限りは積分不可能だと思いますが，このような積分は「はさみうち」以外に収束することを示せないのでしょうか．それとも第 14 回で求める（らしい）何らかの方法を用いて計算し，収束するか否かを見極めるのでしょうか.

お答え： 「多重積分でない限り積分不可能」の意味がわかりません．e^{-x^2} は連続関数ですから，任意の有界な区間で積分可能です．ご質問の式は「不定積分」の形ですから，もちろんそれは存在します．で，何が聞きたいの?

質問： $|\Sigma(\Delta\theta_j)\star| \leqq |\star|\sum|\Sigma(\Delta\theta_j)|$ の不等式が成り立つ理由がよくわかりませんでした.

お答え： これ自体は「三角不等式」$|a+b| \leqq |a|+|b|$ からすぐにわかります．この考え方は，問題 9-6 の解答，問題 11-4 の解答などにもでてきます.

質問： $r(\theta+\Delta\theta)-r(\theta) = r'(\theta)\Delta\theta + (\text{小})$ は平均値の定理（略）からきてるんですか? それなら (小) はどうして出てくるのですか? わかりません.

お答え： そんな高級なものではなく，微分可能性です．$r(\theta+\Delta\theta)-r(\theta)-r'(\theta)\Delta\theta = h(\theta)$ とおくと，微分可能性と微分の定義から $\displaystyle\lim_{\Delta\theta\to 0}(h(\theta)/\Delta\theta) = 0$．すなわち，この項は $\Delta\theta$ よりはやく小さくなる.

質問： $\varPhi(a+h,b+k) = F(a+h,b+k)-F(a,b)$ が $\fallingdotseq \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix}$ とかけるのがよく分かりません.

お答え： どこのことでしょうか．講義ノート 93 ページの式と想像して回答します：同 4 行目の式はわかりますか? 微分可能性の定義そのものです．その最後の項は (h,k) にくらべて小さい項なので，それを落とすと (12.4) が出ます.

質問： 1 変数の置換積分法の公式 (12.1) は変数変換が増加関数で与えられる場合に成り立つとありますが，それ以外の場合はどうやって考えるんでしょうか.　**お答え：**高等学校ではどう習いました? いくつも例があったはず.

質問： p. 83 の外積計算がどうして（略）になるのかわかりません.（自分の計算だとそうならなかった).

お答え： 計算してみましょう.

$$\begin{aligned}
&\bigl(\Delta x, 0, f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\bigr)\times\bigl(0,\Delta y, f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\bigr)\\
&\qquad\qquad= \Bigl(-\bigl(f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\bigr)\Delta y, -\bigl(f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\bigr)\Delta x, \Delta x\Delta y\Bigr)\\
&\qquad\qquad= \left(-\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}, -\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}, 1\right)\Delta x\Delta y.
\end{aligned}$$

質問： 授業で聞き逃しただけかもしれませんが，講義資料 1 枚目右側の「$[a,b]$ の微小区間の幅と $\sim$ 幅の比が φ' だからである」の意味がわかりません．$(b-a):(\beta-\alpha) = du:dx$ ということですか? $du:dx$ とはどんな値ですか?

お答え： ここでは小学校で習った「比の値」と比を混同して使っています．$du:dx$ という微妙なことではなく，$1:\varphi'$ です．ちなみに $b-a$ と $\beta-\alpha$ の比ではなく，微小な区間長さの比です．講義ノート 90 ページ.

質問： ドーナツをうすく切ったこれ（図省略）は穴側より外側の方が長くなりますが，それも微小として不具合はないのですか?

お答え： 文脈がわかりません．問題 11-4 の解説の場面であれば，講義では，長方形を回転させた回転体の体積をきちんともとめて $\Delta x\Delta y$ でくくったあとでさらに小さい項をすてる，という操作をやりましたよね.

質問： 問題 11-4 の 1 つ目の式を示すときは集合 D を分割して，分割した 1 つを x 軸まわりにまわしてドーナツをつくって面積（原文ママ：体積?）を近似すると先生が授業でおっしゃっていたと思うのですが，同じようなやり方で，問題 11-5, 11-6 もできるとおっしゃっていたと思うのですが，表面積が相手では考え方がよくわかりません．

お答え： そうは言っていないはず．問題 11-5 では，曲面が $y^2+z^2=f(x)^2$ という方程式で表されるので，上半分を $z=\sqrt{f(x)^2-y^2}$ とグラフ表示して 83 ページの公式を用いる．問題 11-6 は平面曲線の長さの公式（グラフ表示の公式からパラメータ表示の公式に乗り移るところ）を真似る．微小な面積を使うのであれば $[x,x+\Delta x]$ の区間に対応する回転面を，円錐の薄いスライスの面積で近似する．

質問： 一変数の置換積分の公式は $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\bigl(x(u)\bigr)\frac{dx}{du}du$ ではなく，ヤコビ行列 $\left(\frac{dx}{du}\right)$ よりヤコビアン $\det\left(\frac{dx}{du}\right)$ の絶対値 $\left|\frac{dx}{du}\right|$ を用いて $\int_\alpha^\beta f\bigl(x(u)\bigr)\left|\frac{dx}{du}\right|du$ が正しいと思うのですが，$\left|\frac{dx}{du}\right|$ ではなく $\frac{dx}{du}$ なのでしょうか．

お答え： 一言だけコメントしたのですが，わかりにくかったかも．$x=x(u)$ が単調非減少なら，絶対値のついた式とつかない式は同じ．そこで x が単調非増加（あるいはもう少し強く，単調減少）とするとき，$I=[a,b]$ が $I'=[\alpha,\beta]$ に対応するならば，次は正しい：

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{I'} f\bigl(x(u)\bigr)\left|\frac{dx}{du}\right|du \qquad \left(\int_I **\,dx=\int_a^b **\,dx,\quad \int_{I'} **\,du=\int_\alpha^\beta **\,dx\right).$$

いま $x(u)$ は減少するので $x(\beta)=a$, $x(\alpha)=b$. したがって，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_I f(x)\,dx = \int_{I'} f\bigl(x(u)\bigr)\left|\frac{dx}{du}\right|du = \int_\alpha^\beta f\bigl(x(u)\bigr)\left|\frac{dx}{du}\right|du\\ &= \int_\beta^\alpha f\bigl(x(u)\bigr)\left(-\left|\frac{dx}{du}\right|\right)du = \int_\beta^\alpha f\bigl(x(u)\bigr)\frac{dx}{du}\,du \qquad \left(\because \frac{dx}{du}\leqq 0\right).\end{aligned}$$

すなわち，積分区間の「上端」と「下端」の大小が逆になる場合まで考えれば絶対値を外すことができるのです．

質問： $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$ において，なぜ $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ と絶対値をつけるのですか．$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ が対応する微小領域の面積の比だからですか．

お答え： 微小領域の面積の比は絶対値がついた方．一つ上の質問のように，一変数関数では「積分の範囲を上下逆にとる」ことで絶対値を外せました．多変数の場合も「積分の範囲」に向きをつけることで同様に絶対値を外せますが，この講義では扱いません．同じ範囲で向きを考えずに積分するときは，絶対値になるのです．

質問： 多変数関数の重積分の変数変化において，領域 D が領域 $\widetilde{D}$ になったとき，この 2 つの面積比がヤコビ行列式になる理由がわかりません．

お答え： 「領域」なのですか? この授業の意味で領域ではないと思います．D と $\widetilde{D}$ の面積比がヤコビ行列式になる，とはどこでも言っていません．D の微小な部分の面積と，対応する $\widetilde{D}$ の微小な部分の面積の比がヤコビ行列式．

質問： 重積分の変数変換の際出てくる $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ は写像で伸び縮みした分を打ち消す項という認識であっていますか?

お答え： 「認識」という語で何をさしているかわかりませんが，まあそうです．一変数の場合と同じということは説明できますか? ただし「項」ではなく「因子」です．

質問： p95 において E_1, E_2 は D_1, D_2 に「ほぼ 1 対 1」に写るとありますが重なりがある部分の面積が 0 なら積分に影響しないという部分の意味がわかりません．なぜ重なりがある部分の面積が 0 だと積分には影響しないのですか．

お答え： 面積確定集合 D 上で関数 f が最大値 M，最小値 m をとるとすると，

$$m|D| \leqq \iint_D f(x)\,dx \leqq M|D| \qquad (|D| \text{ は } D \text{ の面積}).$$

もし D の面積が 0 ならば f の D での積分は 0 になり，この部分は積分の値に寄与しないことがわかります．

質問： オラ・ヤコビだよ．$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ で定義の中に現れる極限値が存在するとき，$\int_a^b f(x)\,dx$ と値が同じになることを証明できるのですか．

お答え： ¡Hola! Sr. Jacobi. (1) f が $[a,b]$ で連続であるとき，$\int_x^b f(t)\,dt$ は $[a,b]$ で連続となる（定理 9.10 から微分可能になる．したがって命題 3.8 から連続）．したがって，ご質問の極限は存在して $\int_a^b f(x)\,dx$ と等しくなります．(2) f が $(a,b]$ で連続だが a まで連続に拡張できないとき，そもそも $\int_a^b f(x)\,dx$ は（第 9 回の意味では）定義できない．そのとき，ご質問の極限が存在するときその極限値を $\int_a^b f(x)\,dx$ と**書くことにする**というのが 97 ページに書かれていること．この場合，ご質問はナンセンスですね．

質問： $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を $I^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$ を利用して重積分における変数変換を用いて I を求めるという記述を見たのですが，$I^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy$ のように，2 つの積分の積を 1 つの重積分にまとめてしまってよいのでしょうか.

お答え： 14 回に計算しますが「よい」. ただし，これは広義積分で，微妙な議論が必要なので，ここでは有限な区間での積分を考えましょう：$D=[-M,M]\times[-M,M]$ (M は正の数) とすれば，重積分を累次積分に書き換えて

$$J:=\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\iint_D e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy=\int_{-M}^{M}\left(\int_{-M}^{M} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dy\right)dx$$

を得る．この右辺の内側の積分を計算するときは，x を定数とみなしているので，

$$J=\int_{-M}^{M}\left[e^{-x^2}\left(\int_{-M}^{M} e^{-y^2}\,dy\right)\right]dx=\int_{-M}^{M} Ie^{-x^2}\,dx \qquad \left(I:=\int_{-M}^{M} e^{-y^2}\,dy=\int_{-M}^{M} e^{-t^2}\,dt\right).$$

I は x にも y にもよらない定数だから，

$$J=I\int_{-M}^{M} e^{-x^2}\,dx=I\int_{-M}^{M} e^{-t^2}\,dt=I^2. \qquad \text{すなわち} \qquad \left(\int_{-M}^{M} e^{-x^2}\,dx\right)^2=\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

質問： 講義ノート p. 85 の例 11.5 で線密度，面密度には単位がありますが，数直線上の区間や面積確定集合に単位の説明がないのは大丈夫なんですか? **お答え：**高等学校と同様，数学では長さ，面積の単位によらない性質を考えるので，特に単位を明記しないのが習慣.「密度と体積」などという状況は，応用の場と強くつながるので，どのような量を考えているかを明示するために単位をつけてみました.

質問： $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}$ だと $\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$ で計算が今の私の能力ではできないのですが，他の式に表せませんか?

お答え： ヤコビアンが定義できるのは，変数の数が同じときです．行列式が定義できるのは正方行列だけでしたね．変数の個数が異なる場合は「変数変換の公式」も成り立ちません.

質問： 問題 12-3 で変数変換して $\varphi(x)=\int_0^x \varphi'(u)\,du=\int_0^1 \varphi'(tx)\frac{du}{dt}\,dt=\int_0^1 \varphi'(tx)x\,dt=x\varphi(x)$ となってしまったのですが，よくわかりません. **お答え：**最後の等号が間違っています. $\varphi(0)=0$ のとき $\int_0^x \varphi'(s)\,ds=\varphi(x)$ は正しいですが，積分する変数と φ' に入れる変数が同じでないと，この式が成り立つとは限りません.

質問： 代表的な (※) ヤコビアンを 3 つ挙げて下さい. ※先生にとってで構いません.

お答え： 線形変換，平面の極座標，空間の極座標のヤコビアン.

質問： ${}^t(a,b)$ の t は転置という意味ですか? **お答え：**はい. 講義ノート 34 ページ，脚注 3.

質問： 適当に描いた曲線がなめらかであるとき，この曲線は何らかの関数をあてはめられますか.

お答え： 曲線に関数をあてはめるということはどういうこと? 曲線がなめらかであるとはどういうこと?

質問： p. 91 に線形変換と書いてありますが，“一次変換” と同じことでしょうか.

お答え： 専門用語としては同じ.「$\mathbb{R}^n$ の線形変換」「$\mathbb{R}^n$ の一次変換」という言葉は通じますね.

質問： ヤコビアンとヤコビ行列の違いは何ですか? **お答え：**行列式と行列.

質問： 正則な線形変換と正則でない線形変換の例は?

お答え： $\mathbb{R}^1$ の線形変換で $T_1(x)=x$ (正則)，$T_2(x)=0x$（正則でない）. 線形代数では例がでてきませんでしたか?

質問： 人間の視野は 360° ではないので，北極に立ったときに「一度に」見ることのできる範囲の面積はもっと小さいと思います. **お答え：**なるほど.

質問： 高校のときにパップス・ギュルダンとロピタルは使うなと言われてましたが， これからは証明とか付けなくても使ってよいのですか? **お答え：**よいのでは？正しい定理の主張を知っていて，正しく定理を使っている限りは.

質問： ヤコビの行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ の左辺は点 (x,y) を点 (u,v) で偏微分するというふうに読めますが，点は微分できませんよね. どうしてこんな表記のしかたをするのですか?

お答え： 由来は知りません. ところで，点の座標が他の量から決まるなら，その量で微分できません?

質問： 中間と期末の難易度の高さはどのようになっていますか? 期末の方が難しいですか? **お答え：**決めてません.

質問： 中間の回答は OCW-i にのっていますが，解説はのっていません．自分で考えるということですか?

お答え： 講義時間に解説しましたが. それ以上何が必要? 必要なことがあったら質問してください.

質問： 講義ノートの訂正を聞き逃した時，どのように確認すればよいですか? **お答え：**講義資料にあげてあります.

質問： 数学は好きですか? **お答え：**ひ・み・つ ♡