微分積分学第一 (14)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc1/

2014.07.23

おしらせ

- 今回が最終回です．ご聴講ありがとうございました ♡
- 7 月 30 日に定期試験を行います．お忘れなく．
- 授業評価よろしく．現在 19/94．
- 後期「微分積分学第二 B」は山田の担当（ごめん）
  衛星配信はしないので，教室が変わります．

ご意見

ご意見： 提出物の採点お疲れ様です ♡

コメント： ありがとうございます ♡♡

ご意見： 積分の変数変換に一目惚れしちゃった ♡

コメント： ひと目じゃなく，よく見て ♡

ご意見： この半年間で "変態" に対する感情が変わりました．後期も "変態" についてのご指導よろしくお願いします．
最後に. . . 単位ください!

コメント： 後期はたくさん変態さんが登場します．
後半：講義資料 11, 最後から 10 個目のコメント．
「いやです．勝手に取って行ってください.」

質問

Q: **心の傷はどうやったら癒えるのですか**?

A: **山田のですか？癒えません.**

Q: **先生の夏休みが楽しくなるように祈ってます**!

A: **そんなもんねーよ!**

Q: **「**$:=$**」と「**$=$**」はどう違うんでしょうか.**

A: **講義ノート** 21 **ページ，脚注** 10.
「記号 “$:=$” **は** (**ここでは**) **左辺を右辺によって定義するという意味を表す.」**

ガンマ関数

Theorem (例 13.2)

任意の正の数 s に対して，次の広義積分は収束する：

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \tag{$*$}$$

Definition (ガンマ関数)

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \qquad (s>0).$$

Example

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

広義積分の収束判定

Fact (事実 13.5)

区間 I 上の，連続関数 f, g が

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad (x \in I), \qquad \text{かつ} \qquad \int_I g(x)\,dx \quad \text{が収束する}$$

ならば，広義積分

$$\int_I f(x)\,dx$$

は収束する．

Remark

上の状況で f の広義積分が発散 $\Rightarrow$ g の広義積分も発散．

指数関数と多項式の関係

Lemma (補題 13.6, 系 13.7（訂正あり）)

任意の負でない実数 p **に対して**

$$x^p \leq Me^x \qquad (x \geq 0) \qquad \text{ただし} \quad M = ([p]+1)!.$$

Corollary

任意の実数 p **と正の実数** a **に対して** $\lim_{x \to +\infty} x^p e^{-ax} = 0.$

指数関数は，多項式よりもずっと早く大きくなる．

Corollary

任意の実数 p **に対して** $\int_0^\infty x^p e^{-x}\, dx$ **は収束する．**

ガンマ関数の定義可能性

Theorem (例 13.2)

任意の正の数 s に対して，次の広義積分は収束する：

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \qquad (*)$$

- $s \geq 1$ **のとき**...
- $0 < s < 1$ **のとき**

$$\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad \text{は収束} \quad (\because) \quad x^{s-1}e^{-x} \leq x^{s-1} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad \text{は収束} \quad (\because)$$

ガンマ関数の性質

Theorem

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

Proof.

正の数 ε, M に対して

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{M} x^s e^{-x}\,dx &= -\left[x^s e^{-x}\right]_{\varepsilon}^{M} + s\int_{\varepsilon}^{M} x^{s-1}e^{-x}\,dx \\ &= M^s e^{-M} - \varepsilon^s e^{-\varepsilon} + s\int_{\varepsilon}^{M} x^{s-1}e^{-x}\,dx.\end{aligned}$$

この式で $\varepsilon \to +0$, $M \to +\infty$ とすればよい． $\square$

正の整数 m に対して $\Gamma(m) = (m-1)!$

ガンマ関数とベータ関数

Theorem (例 13.3)

任意の正の数 p, q **に対して，次の広義積分は収束する：**

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q \, dx$$

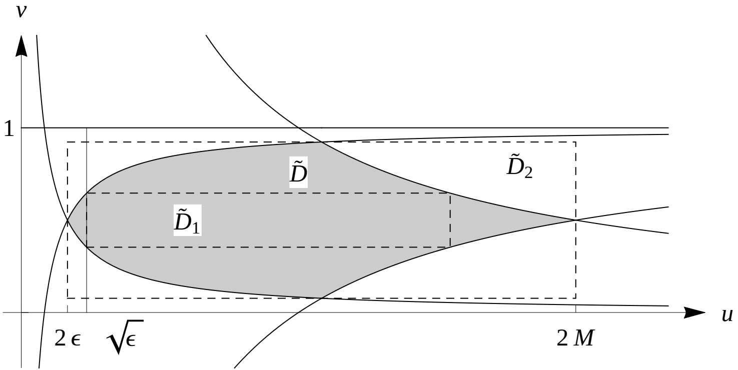
Definition (ベータ関数)

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx$$

Theorem (定理 14.5)

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$$

定理 14.5 の証明の図



$$\widetilde{D}_1 := \left[\sqrt{\varepsilon}, \frac{M}{1-\sqrt{\varepsilon}}\right] \times [\sqrt{\varepsilon}, 1-\sqrt{\varepsilon}]$$

$$\widetilde{D}_2 := [2\varepsilon, 2M] \times \left[\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}, \frac{M}{M+\varepsilon}\right]$$

ガウス積分

Theorem (定理 14.1)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Corollary (系 14.2)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Corollary (系 14.3)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1.$$

Gauss

ご聴講ありがとうございました

♡

Good Luck!