2014 年 7 月 23 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 14

お知らせ

- 今回が最終回です．ご聴講ありがとうございました．
- 来週の定期試験，お忘れなく．
- **授業評価**ご協力ねがいます．まだ 18/94 (2014.07.21)．そろそろ中の人不機嫌．

前回までの訂正

- 講義ノート 94 ページ 3 行目：$x_v(a,b)\Delta u \Rightarrow x_v(a,b)\Delta v$ （再訂正）．
- 講義ノート 101 ページ 3 行目：$M=[p]+1 \Rightarrow M=([p]+1)!$
- 講義ノート 102 ページ，脚注 8：名前 se ⇒ 名前
- 講義ノート 103 ページ，4 行目：正の数 p, q ⇒ 正の実数 p, q
- 講義資料 13，2 ページ 5 行目：「山田のコメント：上着がないときはベルトです．」が抜けていました．

授業に関する御意見

- この前の質問で 3 点もらえたのに，授業でも扱われなかったしプリントにもなかったのが困りました． **山田のコメント：** 講義資料 13，4 ページ 18 行目．
- 高校とはまた違った視点（?）から積分に接しているのは分かっていますが，初等関数の形で表せない広義積分の収束するか否かがわかるのは不思議な感じがします． **山田のコメント：** すぐ慣れます．
- ε が微小なら，区間で $D=[\varepsilon, M]\times[\varepsilon, M]$ があるのは少し違和感がありますね． **山田のコメント：** 区間 $[0.01, 20]$ はお嫌いですか?
- 提出物の採点お疲れ様です ♡ **山田のコメント：** ありがとうございます ♡♡
- 積分の変数変換に一目惚れしちゃった ♡ **山田のコメント：** ひと目じゃなく，よく見て ♡
- この半年間で“変態”に対する感情が変わりました．後期も“変態”についてのご指導よろしくお願いします．最後に. . . 単位ください!
  山田のコメント： 後期はたくさん変態さんが登場します．後半：講義資料 11，最後から 10 個目のコメント．
- 期末テストも頑張るので，成績優しくつけて下さい． **山田のコメント：** 中間試験と同程度には優しい．
- この授業は単位落としても 2 年生になれるんですよね． **山田のコメント：** 落としたからといって 2 年生になれないわけではない．
- 進捗どうですか? **山田のコメント：** だめです．
- 暑すぎますね． **山田のコメント：** そうですね．
- 空もボクの試験終了を祝ってくれてる！（大雨）昨日は肩壊してました．来週はちゃんといくゾ〜 **山田のコメント：** まだ終わっていない/来たかったらどうぞ．

質問と回答

質問： 広義積分で $\varepsilon\log\varepsilon$ の形が出てきて，ε が 0 に近づく時 $\varepsilon\log\varepsilon$ も 0 になるとなっていましたが，その値が 0 になることが理解できません．$\log\varepsilon$ の方は $-\infty$ に近づく? からどうなんでしょうか．

お答え： 定理：$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\varepsilon=0$．証明：$s=-\log\varepsilon$ とおくと $0<\varepsilon<1$ で $s>0$．また $\varepsilon\to+0$ は $s\to+\infty$ と同値．この置換えの下，系 13.8 を用いれば $\varepsilon\log\varepsilon=-se^{-s}\to 0$ $(s\to+\infty)$．

質問： 講義ノート p 83 の $\int_0^1 dx\int_0^1\sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$ について．

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2+x^2}+(x^2+1)\log(1+\sqrt{2+x^2})-\frac{x^2+1}{2}\log(1+x^2)\,dx$$

となりますが，$(x^2+1)\log(1+\sqrt{2+x^2})$ の部分がうまく積分できません．どうすればよいか教えて下さい．

お答え： $x^2+1=(x^3/3+x)'$ とみて部分積分で log を含まない積分がでてくる．そこで $u=\sqrt{2+x^2}$ と置換する．

質問： 問題 12-1 の 4, 5 番目の問題の変数変換した後，どのように積分すればよいのか教えてください．（そもそもこの方法で積分できるのですか?） **お答え：**解答に，累次積分までの変形を入れておきます．

質問： 講義ノート p 101 の命題 13.9「$\int_1^\infty x^pe^{-ax}$ は収束する」の証明は系 13.8 の $\lim_{x\to+\infty}x^pe^{-ax}=0$ になることをそのまま使ってやってはいけないんですか? 0 に収束してしまえば必ず極限値が存在し収束すると思うのですが．

お答え： あなたが言っているのは「$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ならば広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ が収束する」という定理が成り立つ，ということですね．間違いです．それが正しければ，$\int_1^\infty dx/x$ は収束するはずです．

質問： $\int_0^\infty f(x)dx$ が収束するには $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が収束することが必要ですか?

お答え： f が連続のときは，0 に収束することが必要．連続でなければ f は収束しないが広義積分が収束する例がつくれる．

質問： 例 13.3 がよく分かりません．まず，その前までの文をみると，たとえば $(0,1]$ のような区間であれば ε を 0 に近づけて収束するかを調べました．(13.3) では区間 $(0,1)$ ですが，なぜ 0 と 1 の両方に ε を近づけないのですか? $\left(\int_0^{1-\varepsilon}\right.$ の下側は近づけてない$\left.\right)$

お答え： この例のあちらこちらに $(0,1)$ がでていて紛らわしいですが，被積分関数は $[0,1)$ で連続です．$(0,1)$ は別の量が変化する範囲ですね．したがって 0 の方は広義積分を考える必要がないのです．

質問： $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ の $\int_a^b f(x)\,dx$ が undefined であるのは区間 a の方のはしが開いているからですか．　**お答え：**そうです．

質問： 例 13.3 で $\int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt$ の被積分関数が $[0,\frac{\pi}{2}]$ で連続というだけで，計算するまえから $\varepsilon\to 0$ の極限をとっておいというのはなぜですか?

お答え： まず $F(x) := \int_0^x \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt$ とおくと，被積分関数は連続だから，定理 9.10 より F は微分可能．したがって定理 2.5 から F は連続．$\varepsilon\to+0$ のとき $\sin^{-1}(1-\varepsilon)\to\pi/2$ だから，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} F(x) = F(\pi/2) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt$$

質問： Fact 13.5 で区間 I で定義された連続関数 f, g が I 上で $f(x)\leqq 0$, $g(x)\leqq 0$ を満たし，かつ $f(x)\geqq g(x)$ が成立して $\int_I g(x)\,dx$ が収束すれば $\int_I f(x)dx$ は収束しますか? また，連続関数 f が区間 I で 0 をまたがる場合は，広義積分 $\int_I f(x)\,dx$ の収束判定はできないということですか?

お答え： 前半：$\tilde f(x) := -f(x)$, $\tilde g(x) := -g(x)$ に Fact 13.5 を適用すればよい．後半：$f(x) = x^3$ $-1\leqq x\leqq 1$ は定義域に 0 を含んでいますが何も問題なく積分できますよね．たぶん聞いていることが違うんだと思いますが．

質問： 事実 13.5 について，収束するか分からない広義積分を上から収束する広義積分でおさえこむというイメージを勝手に持っているのですが，このイメージから，事実 13.5 の最初の 2 行の条件を満たし，$f(x)\geqq g(x)$ $(x\in I)$ かつ $\int_a^b g(x)\,dx$ が発散するならば，広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 発散するということが成り立つような気がするのですが，成り立つのでしょうか．

お答え： 成り立ちます．区間 $(a,b]$ で負でない値をとる関数 g の積分が収束しないならば，それは正の無限大に発散します：$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b g(x)\,dx = +\infty$ （関数 g が符号をかえるときはそうはいかない）．したがって

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \geqq \int_{a+\varepsilon}^b g(x)\,dx \to +\infty \qquad (\varepsilon\to+0).$$

質問： 問題 13-4 で $p-1\geqq 0$, $q-1\geqq 0$ より $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は $[0,1]$ で連続だから，純粋に $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ の原始関数を求めればよいのですか．

お答え： p, q とも「正の数」であって「正の整数」とはいっていません．(「正の数」という場合，文脈によっては「正の整数」とよまなければならないときもあるのですが，ここはそれではない．講義ノートには，正の実数という訂正をいれました．）すなわち $0<p<1$, $0<q<1$ の場合が問題になります．

質問： 例 13.13 (ベータ関数) で（定義式略）は広義積分としていますが，$p=q=2$ のときは “広義” とする必要がないです．p, q をどのようにおくと “広義” とする必要があるのですか．

お答え： $0<p<1$ または $0<q<1$ のとき．問題 13-4 の解答例のように場合分けが必要．

質問： 広義積分に対応するような，広義微分と言うべきものは存在しますか?

お答え： そういう術語はないと思います．区間の端なら「右微分係数」「左微分係数」という言葉はあります．

質問： 元々の，狭義の積分のことは「狭義積分」で伝わる可能（原文ママ；可能性?）は高いですか?

お答え： あまりそうは言わないと思いますが，文字通りに読めば意味は通じるでしょうね．

質問： p 99 の 3) (山田注：脚注 3 のことか) に不正確な言い方と書いてありますが，詳しい説明をお願いします．

お答え： ことわりなしに区間 (a,b) と書いたら a, b は $a<b$ をみたす実数です．すなわちここの式では有界な区間しか考えていません（なので $a+\varepsilon_1$ などが意味があるわけです）．非有界な区間の場合は “$b=+\infty$” という状況ですが，これは引用符付きなわけで（b は実数という状況だったのだから）本当は，(1) 関数 f が $(a,+\infty)$ で連続

な場合，(2) 関数 f が $(-\infty, b)$ で連続な場合，(3) 関数 f が $(-\infty, \infty)$ で連続な場合，とするべきです．面倒くさいから（そして，文脈から誤りなく想像できると思ったので）不正確な言い方にしました．

質問： ガンマ関数で階乗が表現できるとのことでしたが，$0! = 1$ とするのはこのガンマ関数から決めたものですか．

お答え： $0!$ だけならガンマ関数を持ち出す必要はありません．整数 $p \geqq 2$ に対して $p! = p(p-1)!$ が成り立つので，これが $p = 1$ でも成り立つ，と拡大解釈してやればよい．

質問： 単調非減少と単調増加の違いは傾きゼロの直線が含まれるかどうかということですか?

お答え： 関数に直線が含まれるってどういうこと?（第 1 回の授業で，関数とそのグラフは分けて考えよ，という話をしましたよね）違いは定義にあるように不等号に等号がつくかつかないかです．わざと曲解しないように．

質問： 広義積分が収束するということは，広義積分で求められる面積がその収束する値を決して超えることがないということですか? 例 13.1 のように具体的だとわかるのですが，例 13.3 のようなものだとわかりずらいです．

お答え： 「広義積分で求められる面積」とは何ですか? それと広義積分の値は違うんですか?

質問： 広義積分が収束することは積分可能，収束しないときは積分不可能と認識してよいのでしょうか?

お答え： やはり「認識」の意味がわからない．「広義積分が収束するとき，積分可能，そうでないとき積分不可能というのですか?」という文なら意味が分かる．余計な単語を入れて意味を不明にする意図は? 回答：積分可能ということもあるし，そう言わずに丁寧に「広義積分が収束する」ということもあります．

質問： $[0, \delta]$ で $1/\sqrt{x}$ は最大値が無いため，$[0, \delta]$ での積分は意味をもたないとあるのだが，$[-1, 1]$ で $1/x$ にも最大値，最小値がないと思うのですが，これはどう解釈すればよいのですか．

お答え： だから $\int_{-1}^{1} dx/x$ は意味をもたない．ちなみに $1/x$ は $[-1, 1]$ 上の関数でない．0 は定義域に含まれません．

質問： 広義積分は関数として定義できない $(\log 0)$ などの時にしか使わないのですか? 計算が面倒なときに使っていいのですか？　**お答え：**関数として定義できない，って何? 「積分を考えている区間に関数の定義域に含まれない点がある」のでは? 本来広義積分でないが，広義積分と思うと計算が簡単になる状況? 具体的にはどんな例?

質問： 関数として定義できないものを積分するとき以外に広義積分を使うことはありますか?

お答え： 広義積分は関数として定義できないものを積分してるの? 関数を積分していますけど（質問の意味不明)．

質問： $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ のようにその積分区間において積分が意味をもたないときに広義積分を用いて広義積分が収束すれば値が正確にもとまらずとも，もとの積分区間においての積分は収束すると考えていいのですか?

お答え： ごめんなさい．何を言っているのか全然わかりません．広義積分という語で何を指していますか．関数が定義されている区間の積分の極限値を広義積分というんです．すると「広義積分を用いて」という語の意味が分からなくなりませんか? 「正確にもとまらずとも」とおっしゃいますが，ご質問の最初の広義積分の値は正確に 2 です．

質問： $E(x, k) =$ (略，第二種楕円積分) $E(x, k)$ は初等関数で表せないが，$x \in [0, 1]$, $k \in (0, 1)$ に対して値が定まることはわかりますが，収束を確認してそののちどのような実用性があるのですか?

お答え： 「楕円積分」「楕円関数」で検索してごらんなさい．18 世紀以来，数限りない応用があります．この質問は「三角関数が定義されるのはわかるのですがどのような実用性があるのですか」というのとほぼ同義と思います．

質問： ガンマ関数，ベータ関数は何のためにつくられた関数なのでしょうか?

お答え： 階乗の一般化（オイラー）らしいです．よく知りませんが．無論，それを超えて数限りない応用例があります．

質問： ガンマ関数で整数以外の階乗を定義しましたが，これはどのような場所で用いられるのでしょうか? 以前おっしゃっていた「掛け算九九」と一緒でしょうか．　**お答え：**そうですね．九九に近いですね．

質問： ガンマ関数は $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ が $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ に収束するため，$\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ $s > 0$ において s のみが変数だと考えるため $\Gamma(s)$ とできるのですよね?　**お答え：**ごめん，全く意味がわからない．とくに 2 箇所の「ため」の論理関係．

質問： $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ が $\int_0^\infty$ だと計算できるのですが，$\int_{-\infty}^\infty$ となると計算ができないです．助けて下さい．

お答え： $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-u^2} du$. 助かった?

質問： $\int_0^{2\pi} \dots d\theta$ の積分で $\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ は重なるので同じところを 2 回積分しているとおっしゃいましたが，そもそも $\int_0^{2\pi} \dots d\theta$ とは積分区間が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ と誰が決めたのですか? $0 \leqq \theta < 2\pi$ だといけないのでしょうか?

お答え： 第 9 回の講義で決めた．講義ノート 65 ページで考えている区間 I はずっと閉区間 $[a, b]$ です．

質問： なぜガウス積分を負で考えてはいけないのでしょうか．いつも正で定義するのは計算していき，最後に 1/2 乗する際に都合が良いからでしょうか．　**お答え：**状況がわからないが，注意 13.11 では $(-\infty, \infty)$ で積分している．

質問： 前回の授業で，積分して具体的な数値を求めることはできないが，積分が収束するかどうかのみわかる場合があるとありましたが，収束するかどうかのみ分かったところでどのように応用していくのでしょうか? 全く思い浮かびません．　**お答え：**すくなくとも「ガンマ関数が定義できる」というのは応用では?

質問： 講義の最後の方にガンマ関数やベータ関数が出てきましたが，アルファ関数と呼ばれている関数もあるのですか?

お答え： 検索するといろいろと出てくるようですが，山田は日常であまりお目にかかりません．

質問： $\iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}\,dx\,dy$ を $x=uv$, $y=u(1-v)$ で表しなおしたのは，何か楽になったり，この表し方をすると何かの物理現象を表したりするんですか? それともただの変数変換の練習ですか?

お答え： 今回の目的はただの練習．第 14 回で，ガンマ関数とベータ関数の関係式を示すのに用いる（と講義で述べた）．

質問： e^{-x^2} の原始関数が初等関数で表せないということがどういうことか分かりません．これを表すための特殊な記号があるのですか． **お答え：**講義資料 10，3 ページの上半分の一連の質問と回答を見よ．

質問： 前回のプリント (12 回) の p93 で $\boldsymbol{F}(a+h,b+k)$ は $\begin{pmatrix} x(a+h,b+k) \\ y(a+h,b+k) \end{pmatrix}$ という列ベクトルですよね．

お答え： はい．右辺の形からわかりますね．

質問： $I=(a,b]$ で定義された連続関数 f, g が（略．事実 13.5）ことの証明はできるのですか．

お答え： 実数の連続性を用いる．後期にコメントする（級数に関する類似の定理には証明を与える）と講義中に述べた．

質問： $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ がルベーグ積分として考えることができないのはなぜでしょうか．

お答え： ルベーグ積分はこの講義の範囲ではないが，すこしだけ説明しよう．第 9 回に概略をのべた積分の定義はリーマンによるもので「リーマン積分」とよばれることもある．これを（ある意味で）含むような積分の拡張概念がルベーグ積分．有界な閉区間の連続関数を考えている限りはこれらに違いはないが，無限の区間や有界でない関数を考えると，定義の違いが出ることがある．この例で，被積分関数と，その正の部分，負の部分を

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x>0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}, \qquad f_+(x)=\max\{f(x),0\}, \qquad f_-(x)=\min\{f(x),0\}$$

と書くと，極限値 $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_0^\infty f(x)\,dx$ は存在する，すなわち広義積分は収束することが示せるが，次の広義積分は発散する：

$$\int_0^\infty f_-(x)\,dx, \qquad \int_0^\infty f_+(x)\,dx.$$

実はルベーグ積分はこれらの積分の差を用いて定義するので，積分が定義できない，すなわちルベーグ積分不可能．これに類似の現象で $\sum_{n=1}^\infty 1/n$ は発散するが，$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n/n$ は収束する，という例を後期に扱う．

質問： 「:=」と「=」はどう違うんでしょうか． **お答え：**講義ノート 21 ページ，脚注 10.

質問： $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ が収束しなくなる境界が $\alpha=-1$ であることが不思議だと思いました． **お答え：**で，質問は?

質問： 心の傷はどうやったら癒えるのですか? **お答え：**癒えません．

質問： 先生の夏休みが楽しくなるように祈ってます! **お答え：そんなもんねーよ!**

■前回の回答もれ

質問： 講義ノート p. 93 事実 12.9 について質問です．変換 $F(u,v)$ で写した像は平行四辺形になるとありますが，なぜ，長方形でないのでしょうか．また，像の面積の近似が $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$ になるのかがわかりませんでした．$(x_u(a,b)\Delta u+x_v(a,b)\Delta v)\times(y_u(a,b)+y_v(a,v)\Delta v)$ を近似するとそうなるのでしょうか．授業でやってくださったのにすいません．

お答え： 授業ではいい加減にしかやっていません．(a,b), $(a+\Delta u,b)$, $(a+\Delta u,b+\Delta v)$ $(a,b+\Delta v)$ を頂点とする長方形の各頂点の像はそれぞれ $\bigl(x(a,b),y(a,b)\bigr)$, $\bigl(x(a+\Delta u,b),y(a+\Delta u,b)\bigr)$, $\bigl(x(a+\Delta u,b+\Delta v),y(a+\Delta u,b+\Delta v)\bigr)$, $\bigl(x(a,b+\Delta v),y(a,b+\Delta v)\bigr)$ となるので，長方形の像は，これらを結ぶある曲線で囲まれた内部となる．ここで，微分可能性の定義から，(h,k) が十分小さいときは，$F(a+h,a+k)\fallingdotseq F(a,b)+F_u(a,b)h+F_v(a,b)k$ という近似が成り立つ．したがって，上の 4 点は Δu, Δv が小さいときは

$$\begin{aligned}
&\bigl(x(a,b),y(a,b)\bigr)\\
&\bigl(x(a,b)+x_u(a,b)\Delta u,y(a,b)+y_u(a,b)\Delta u)\bigr)\\
&\bigl(x(a,b)+x_u(a,b)\Delta u+x_v(a,b)\Delta v,y(a,b)+y_u(a,b)\Delta y+x_v(a,b)\Delta v\bigr)\\
&\bigl(x(a,b)+x_v(a,b)\Delta v,y(a,b)+x_v(a,b)\Delta v\bigr)
\end{aligned}$$

で近似されるので，F による長方形の像はこれらの点を頂点とする四角形（これは平行四辺形ですね）で近似される．後半は，この平行四辺形の面積を求めればわかる．