微分積分学第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解することができるように書いてください.
- 計算・下書きには解答用紙の裏面・余白をご利用ください. ただし, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙 (座席表を含む)** と **持込用紙** を回収します. 問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 8 月 5 日から 8 日の間, **数学事務室 (本館 3 階 332B)** にて返却いたします.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, **8 月 9 日まで**に山田まで電子メイルでお申し出下さい. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.
- 成績は, 定期試験・中間試験・毎回の提出物のみから決定されます. ご了承ください.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{17}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい. [25 点]

uv 平面上の領域 $D = \{(u,v)\,|\,u>0, u>v\}$ で定義された 2 つの 2 変数関数

$$(*) \qquad x = x(u,v) = u^2 - v^2, \qquad y = y(u,v) = uv$$

を考えると, x の偏導関数は $\boxed{1}$, y の偏導関数は $\boxed{2}$ と u, v の具体的な式で表される. 対応 $(u,v) \mapsto (x,y)$ のヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \boxed{3}$$

で与えられ, とくに D 上で 0 にならない. この対応は, 領域 D を xy 平面上の領域 $D' = \{(x,y)\,|\,x>0, y>0\}$ に 1 対 1 に写す. そこで, 逆の対応 $(x,y) \mapsto (u,v)$ を $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ と書いておく. このとき xy 平面上の領域 D' で定義された C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して $\tilde{f}(u,v) = f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ とおくと, チェイン・ルールから

$$\tilde{f}_u = \boxed{4}\,f_x + \boxed{5}\,f_y, \qquad \tilde{f}_v = \boxed{6}\,f_x + \boxed{7}\,f_y$$

が成り立つ. また $f(x,y) = \tilde{f}\bigl(u(x,y), v(x,y)\bigr)$ なので, この偏導関数は

$$f_x = \boxed{8}\,\tilde{f}_u + \boxed{9}\,\tilde{f}_v, \qquad f_y = \boxed{10}\,\tilde{f}_u + \boxed{11}\,\tilde{f}_v$$

をみたす [1]. さらに微分して

$$f_{xx} = \boxed{12}\,\tilde{f}_{uu} + \boxed{13}\,\tilde{f}_{uv} + \boxed{14}\,\tilde{f}_{vv} + \boxed{15}\,\tilde{f}_u + \boxed{16}\,\tilde{f}_v,$$

などとなるので, $4f_{xx} + f_{yy} = \boxed{17}$ [2] となる.

裏面につづく

[1] $\boxed{4}$–$\boxed{11}$ には u, v の具体的な式が入る.
[2] $\boxed{17}$ には $\tilde{f}$ の u, v に関する偏導関数, 2 次偏導関数の式が入る.

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$〜 $\boxed{6}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい． [25 点]

xy 平面で定義された関数 $F(x,y) = \cosh x \cdot \sinh 2y - \sqrt{3}$ の 1 次偏導関数は $\boxed{1}$ である．
いま，集合

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, F(x,y) = 0\},$$

を考えると，L は，C^∞-級の関数 g のグラフ $y = g(x)$ で表すことができる（この事実はみとめてよい）．
とくに $g(0) = \boxed{2}$, $g'(0) = \boxed{3}$, $g''(0) = \boxed{4}$ であり，関数 g は 0 で $\boxed{5}$[3]．さらにグラフ $y = g(x)$ の変曲点の x 座標を α とすると，$\cosh \alpha = \boxed{6}$ である．

問題 C 次の文中の $\boxed{1}$〜 $\boxed{9}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れ，下線 **a**〜 **b** を付した部分の理由を述べなさい． [25 点]

xy 平面全体で定義された関数

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} + \tan^{-1} x + \tan^{-1} y & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える．とくに $\varphi(0,0) = \boxed{1}$, $\varphi(1,0) = \boxed{2}$, $\varphi(1,-1) = \boxed{3}$, $\varphi(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \boxed{4}$ である．この関数 φ の x に関する偏導関数は

$$\varphi_x(x,y) = \begin{cases} \boxed{5} & (x,y) \neq (0,0) \\ \boxed{6} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

である．同様に y に関する偏導関数も求めることができ，とくに$_{\mathbf{a}}$ $\underline{\varphi_y(0,0) = \boxed{7}}$.
したがって φ は偏微分可能で $\boxed{8}$[4]．また$_{\mathbf{b}}$ $\underline{\varphi \text{ は } (0,0) \text{ で微分可能で } \boxed{9}}$.

問題 D 次の文中の $\boxed{1}$〜 $\boxed{11}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい． [25 点]

正の実数 a, M に対して $\displaystyle\int_0^M \frac{dx}{a^2+x^2} = \boxed{1}$ であるから，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$ は $\boxed{2}$[5] して，その値は $\boxed{3}$ である[6]．
正の実数 R に対して，$E_R = \left\{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leqq R^2, x \geqq 0, y \geqq 0\right\}$ 上での重積分

$$I_R := \iint_{E_R} \frac{x}{a^2+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\boxed{4}}^{\boxed{5}} dx \int_{\boxed{6}}^{\boxed{7}} \frac{x}{a^2+x^2+y^2}\,dy \qquad (a \text{ は正の実数})$$

を考える．変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと，

$$I_R = \iint_{E'_R} \boxed{8}\,dr\,d\theta, \qquad (E'_R = \boxed{9})$$

となるので $I_R = \boxed{10}$．とくに $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \frac{I_R}{R} = \boxed{11}$ である．

問題 E [0 点] なにか言い残すことがありましたらお書きください．

おつかれさまでした ♡♡
まだの方は **授業評価アンケート** にご協力お願いいたします．また秋におあいしましょう

---

[3]問題 B $\boxed{5}$ には「極大値をとる」「極小値をとる」「極値をとらない」のいずれかが入る．
[4]問題 C $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ には「ある」,「ない」のいずれかが入る．
[5]問題 D $\boxed{2}$ には「収束」,「発散」のいずれかが入る．
[6]問題 D $\boxed{3}$: 値が存在しないときは × を入れる．

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–3:5 点，4–7:5 点, 8–11:5 点, 12–16:5 点, 17:5 点

1: $x_u = 2u, \qquad x_v = -2v$

2: $y_u = v, \qquad y_v = u$

3: $2(u^2+v^2)$

4: $2u$

5: v

6: $-2v$

7: u

8: $\dfrac{u}{2(u^2+v^2)}$

9: $\dfrac{-v}{2(u^2+v^2)}$

10: $\dfrac{v}{u^2+v^2}$

11: $\dfrac{u}{u^2+v^2}$

12: $\dfrac{u^2}{4(u^2+v^2)^2}$

13: $\dfrac{-uv}{2(u^2+v^2)^2}$

14: $\dfrac{v^2}{4(u^2+v^2)^2}$

15: $\dfrac{u(3v^2-u^2)}{4(u^2+v^2)^3}$

16: $\dfrac{v(3u^2-v^2)}{4(u^2+v^2)^3}$

17: $\dfrac{1}{u^2+v^2}\left(\tilde{f}_{uu}+\tilde{f}_{vv}\right)$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 3: 「ヤコビ行列式」なので「ヤコビ行列」を書いた人は不正解.
- 8–11:「逆関数の偏微分は偏微分の逆数ではない」ということは何回も授業で指摘したし，中間試験でも同じ問題を出したが，中間試験と同様な誤答が多かった.
  今回はとくにそれに対する処置はしていないが，後期は考慮する必要がある と感じている．具体的には「中間試験と同じタイプの誤答」（授業で指摘する）をしたものは試験全体を 0 点とするとか.

満点 4 名

学籍番号			-						氏名	

2014 年 7 月 30 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–2: 各 5 点，3–4: 5 点，5–6: 各 5 点

1

$$F_x = \sinh x \cdot \sinh 2y, \qquad F_y = 2\cosh x \cdot \cosh 2y$$

2	3	4	5	6
$\log\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$	0	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	極大値をとる	$\sqrt{3}$

計算スペース（採点の対象にはしません）

$y = g(x)$ のとき

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\tanh x \tanh 2y, \qquad g''(x) = -\frac{\tanh 2y}{2}\Big((1-\tanh^2 x) - \tanh^2 x(1+\tanh^2 2y)\Big).$$

- 2: $x = 0$, $y = g(0)$ なら $\sinh 2y = \sqrt{3}$．したがって
$$y = \frac{1}{2}\sinh^{-1}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\log(\sqrt{3}+2) = \log\sqrt{\sqrt{3}+2} = \log\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$
- 4: $y = g(0)$ のとき $\sinh 2y = \sqrt{3}$, $\cosh 2y = \sqrt{1+\sinh^2 2y} = 2$.
- 6:$y = g(x)$ なら $\sinh 2y = \sqrt{3}/\cosh x$．したがって
$$\cosh^2 2y = 1 + \sinh^2 2y = 1 + \frac{3}{\cosh^2 x}$$
であることに注意すると，
$$g''(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cosh^4 x - 2\cosh^2 x - 3 = 0.$$
- 2: $\frac{1}{2}\sinh^{-1}\sqrt{3}$ でもとりあえず正解にした（ちょっとくやしい）.
- 4:$\cosh(\sinh^{-1}\sqrt{3})$ を用いているものは不正解．実際，この式をみたらもう少し簡単にできることは自明でしょう.
- 5: 3, 4 の解答の符号と連動していれば正解．中間試験のあとに指摘した「2 階微分の符号と極大・極小の関係」を間違えている人が無視できない数いる．このようなものも本来 全体で 0 点 とすべきだと思う（後期はそうしたい）.

満点 3 名

学籍番号			-						氏名	

2014 年 7 月 30 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：1–3:5 点，4:5 点，5–6:5 点，7, 8 と **a**:5 点，9 と **b**:5 点

1	2	3	4
0	$\dfrac{\pi}{4}$	-1	$\dfrac{12}{13}+\dfrac{\pi}{4}$

5	6	7	8	9
$\dfrac{-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{1}{1+x^2}$	1	1	ある	ない

下線 a の理由

$$\varphi_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(0,h)-\varphi(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan^{-1}h}{h}=\left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0}\tan^{-1}h=1.$$

下線 b の理由 $x_n=\tan\frac{1}{n}$, $y_n=\tan\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\dots)$ とすると (x_n,y_n) は $n\to\infty$ のとき $(0,0)$ に近づく．ここで各 n に対して $x_n=y_n$ に注意すれば

$$\varphi(x_n,y_n)=1+\frac{2}{n}\to 1 \qquad (n\to+\infty)$$

となる．一方 $\varphi(0,0)=0$ なので φ は $(0,0)$ で連続ではない．
ここで，一般に微分可能な関数は連続であるから，その対偶「連続でないならば微分可能でない」により，φ は $(0,0)$ で微分可能でない．

計算スペース（採点の対象にはしません） 満点 4 名

- 1–4: 「m, n は整数」と書いて $m\pi$ などが解答に含まれている人が多かった．それでは「関数」になっていないではないですか．この講義での $\tan^{-1}$ の定義は何でしたっけ．
- 4: $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$. 試験中に「$\tan^{-1}$ を用いないで」と指示した通り，$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$ がそのまま残っている人は不正解．頓智かも知れませんが $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$ と書いた人が 1 名．しようがないので正解.
- 7,8, 下線 a の理由（まとめて 5 点）: x, y の対称式だから，$\varphi_y(0,0)$ は $\varphi_x(0,0)$ と同じなので，という解答がありました.「$(0,0)$ が $(x,y)\mapsto(y,x)$ で不変である」ことまで言及していないと間違いではないでしょうかたとえば「x, y に関する対称式だから $\varphi_x(1,0)=\varphi_y(1,0)$」という結論はだせないでしょう．
- 下線 b の理由 φ_y の極限を考えた人は「間違い」です．これも授業で何回か説明しましたね．一変数に関してですが，中間試験でも出題しました．

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 D の解答欄 配点：1–3:5 点，4–7:5 点，8–9:5 点，10:5 点, 11:5 点

1	2	3	4	5	6	7
$\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{M}{a}$	収束	$\dfrac{\pi}{2a}$	0	R	0	$\sqrt{R^2-x^2}$

8	9	10	11
$\dfrac{r^2\cos\theta}{a^2+r^2}$	$\left\{(r,\theta)\,\middle\|\,0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}, 0\leqq r\leqq R\right\}$	$R-a\tan^{-1}\dfrac{R}{a}$	1

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 2: 脚注にしたがわず「存在」と書いた方が多数.「広義積分が収束する」という言葉を知っているか，という問いなので「存在」は不正解.
- 9: 中間試験の際も “集合の記号で書く” のがもっとも当てはまる，というコメントをつけましたが，無視ですか．そうですか．寂しい. . . 中間試験の解答とコメントは，web や ocw にのせていたのですがそういうのは「熟読」しないんですかね.
- 11: 10 からの帰結が正しければ正解. $|\tan^{-1}x|<\pi/2$ を知っていればやさしいですね.

満点：19 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 5〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E [0 点] なにか言い残すことがありましたらお書きください．

回答欄

授業評価アンケートにご協力お願いいたします

7 月 29 日現在 30/94

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2014 年度入学の方は，学籍番号のうち “14_” を除いた番号の席に着席してください．
- 2012 年度以前入学の方，および科目等履修生の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- **解答用紙 5 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **5 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終った時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	