1. 多変数関数

1.1　1 変数関数（復習）

高等学校で学んだ微分・積分は，関数に対する操作であった．

一般に（ある範囲の）数 x に対して，ひとつの数 $f(x)$ を対応させる対応の規則 f を（1 変数）**関数**[1] という．このとき，考える x の範囲を関数 f の**定義域**値 $f(x)$ として想定している数の範囲を f の**値域** という．また，x が関数 f の定義域全体を動くとき，値 $f(x)$ が動く値域の中の範囲を f の**像**とよぶ[2]．

■ 実数の集合と区間　関数の定義域，値域，像を表現するために集合の言葉を復習しよう：数学的な対象の集まりを**集合**という[3]．とくに，**実数** 全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く[4]．

一般に対象 x が集合 X の**要素**であるということを“$x \in X$”と表す．たとえば“$x \in \mathbb{R}$”とは“x は実数全体の集合の要素”すなわち“x は実数”であることを表している．

集合 X のいくつかの要素を集めて得られる集合を X の**部分集合**という[5]．集合 Y が X の部分集合であることを，記号 $Y \subset X$ と表す[6]．すなわち[7]

$$Y \subset X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{“}y \in Y \text{ ならば } y \in X\text{”}$$

である．

[*] 2014 年 4 月 9 日 (2013 年 4 月 9 日訂正)

[1] 関数（かんすう）：a function; 教科書のように「函数」と書くこともある．

[2] 定義域:the domain; 値域: the range; 像: the image.

[3] 集合：a set; これでは集合と集合でないものの区別がつけられないので何も言っていないことになるが，この授業で扱う範囲では，対象がきちんと述べられるのでとくに曖昧になることはないはずである．

[4] 実数: real numbers; $\mathbb{R}$ は太字の“R”．印刷では“$\boldsymbol{R}$”を用いることもある．実数の概念を数学的に満足な形で書き表すのはやさしくないので後期に先送りする．当面は**数直線上にめもることができる数**が実数であると思っておけばよい

[5] 要素: an element; 部分集合: a subset; $X \subset Y$ と $x \in Y$ の区別に注意せよ．

[6] 高等学校の教科書では，このことを $Y \subseteqq X$ と書くことが多いが，それ以外の世界では $Y \subset X$ と書くのが多数派のようである．ここでの用法では $X \subset X$ は正しい．

[7] 記号“$A \Leftrightarrow B$”は“A であるための必要十分条件は B”，“A と B は同値”，“A if and only if B”，“A is equivalent to B”と読む．

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合，すなわち実数の集合で，数直線上のひと続きの部分を表しているものを**区間**という．区間には次のようなものがある：

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\},\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\},\\
(-\infty,a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, & (-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq a\},\\
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, & [a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq a\},\\
(-\infty,+\infty) &= \mathbb{R}, & [a,a] &= \{a\}.
\end{aligned}$$

ただし a, b は $a < b$ をみたす実数である．とくに (a,b) を**開区間**，$[a,b]$ を**閉区間**という[8]．

■ 1 **変数関数の例**

例 1.1. 実数 x に対して実数 x^2 を対応させる対応の規則にいま f という名前をつけると，“f は定義域を $\mathbb{R}$，値域を $\mathbb{R}$ とする関数である”と考えることができる．引用符で囲んだ部分のことを

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

と書く．また，“f は x を x^2 に対応させる”ということを

$$f \colon x \longmapsto x^2, \qquad f(x) = x^2$$

と書く．このふたつの矢印の使い分けは，数学の業界ではほぼ標準的である．

この関数 f によって $\star$ に対応する値（数）が $f(\star)$ である：

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(a) = a^2, \quad f(s) = s^2, \quad f(x^2-1) = (x^2-1)^2.$$

ここで x が実数全体を動くと，その値 $f(x)$ は負でない実数全体[9] を動く．したがって f の像は $[0,+\infty)$ となる[10]．　◇

[8] 区間: an interval; 開区間 an open interval; 閉区間: a closed interval. 開区間の括弧は他の記号と紛らわしいかもしれない．それを避けるために (a,b) のことを $]a,b[$ などと書く場合もある．無限大 $\pm\infty$ は実数ではないので，たとえば $(0,+\infty]$ という表記はない．

[9] 負でない実数: a nonnegative real number; 負でない実数全体 (the set of nonnegative real numbers) これは $[0,+\infty)$ のことを表している．正の実数全体 (the set of positive real numbers) は $(0,+\infty)$ のこと．同様に正でない（負の）実数全体（the set of nonpositive (negative) real numbers) はそれぞれ $(-\infty,0]$, $(-\infty,0)$ を表す．

[10] ここでの“像”のことを“値域”という場合もあるがこの講義では例 1.1 のように“像”と“値域”を使い分ける．

例 1.2. (1) 実数 x に対して「平方して x になる実数」を対応させることを考える．実数 -1 に対して平方して -1 になる実数は存在しないから，この対応は関数とみなすことはできない．

(2) 負でない実数に対して「平方して x になる実数」を対応させることを考える．実数 4 に対して平方して 4 になる実数は $+2$ と -2 の 2 つがあるから，この対応は関数とみなすことはできない．

(3) 負でない実数全体の集合 $[0,+\infty)$ の要素 x に対して，「平方して x になる負でない実数」はただ 1 つ存在する．これを $\sqrt{x}$ と書くことにすれば，$f\colon x \mapsto f(x)=\sqrt{x}$ は $[0,+\infty)$ を定義域にもつ関数である． ◇

この授業で扱う 1 変数関数は，主に定義域が $\mathbb{R}$ の区間，あるいはそれらの有限個の合併集合であるようなものである．

例 1.3. (1) 開区間 $I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ の要素 x に対して x の正接 $\tan x$ を対応させる規則 f_1 は，定義域を I，値域を $\mathbb{R}$ とする関数で，f_1 の像は $\mathbb{R}$ である．

(2) 0 でない実数 x に対して $f_2(x)=\frac{1}{x^2}$ を対応させる規則 f_2 は

$$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

を定義域とする関数で[11]，その像は $(0,+\infty)$ である． ◇

関数は一本の式で表されるとは限らないし，数式で表されている必要もない．

例 1.4. 次の f_3, f_4, f_5 は $\mathbb{R}$ 上で定義された関数である：

(1) 実数 x に対して，

$$f_3(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x & (x\neq 0 \text{ のとき}),\\ 0 & (x=0 \text{ のとき}).\end{cases}$$

[11] 記号 “$\cup$” は合併集合 the union を表す．とくに $A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ または } x\in B\}$．

(2) 実数 x に対して，

$$f_4(x)=\begin{cases} 1 & (x\neq 0 \text{ のとき}),\\ 0 & (x=0 \text{ のとき}).\end{cases}$$

(3) 実数 x に対して，

$$f_5(x)=\begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数のとき}^{12)}),\\ 0 & (x \text{ が無理数のとき}).\end{cases}$$

関数 f_3, f_4, f_5 の像はそれぞれ $\mathbb{R}$, $\{0,1\}$, $\{0,1\}$ である[13]． ◇

1.2 多変数関数

■ **記号** 正の整数 n に対して，n 個の実数の組全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と書く：

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}.$$

たとえば $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1,x_2\in\mathbb{R}\}=\{(x,y)\,|\,x,\ y \text{ は実数}\}$$
$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,\ y,\ z \text{ は実数}\}$$

である．とくに $\mathbb{R}$ は数直線，$\mathbb{R}^2$ は座標平面，$\mathbb{R}^3$ は座標空間とみなすこともできる．集合 $\mathbb{R}^n$ の要素のことを $\mathbb{R}^n$ の**点**とよんだりする[14]．

■ **多変数関数** 集合 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D 上の各点 $(x_1,\ldots,x_n)$ に対して実数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ を対応させる規則 f を D 上で定義された (n 変数) **関数**，D を f の**定義域**という[15]．とくに $n\geqq 2$ の場合を**多変数関数**といい，1 変数関数と区別する．第 1.1 節と同様に，“f は $D\subset\mathbb{R}^n$ 上で定義された関数である” ということを

$$f\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$$

[12] 有理数: a rational number; 無理数: an irrational number.

[13] 関数 f_3 の像が $\mathbb{R}$ であることを示すには連続関数に関する中間値の定理を用いるが，今は深入りしない．

[14] 数直線: the number line; 座標平面: the coordinate plane, the Cartesian plane; 座標空間: the coordinate space; 点: a point.

[15] この授業では D としてあまり変な部分集合は考えない．D を $\mathbb{R}^n$ の “領域”（ちゃんとした定義のある言葉である）とするのが妥当だが，その定義を述べるのにはすこし手間がかかるので，いまはあまり気にしないことにする．第 3 回，およびテキスト 7 ページ，脚注 4 参照．

と書く.

例 1.5. 点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f_0(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと f_0 は $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数である [16]：$f_0 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ここで与えた対応の規則は

$$f_0 \colon \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

と書ける. とくに $f_0(0, 0) = 0$, $f_0(1, 0) = 1$, $f_0(-1, -1) = \sqrt{2}$ である. ♢

例 1.6. 東経 x 度, 北緯 y 度の地点の標高を $f_{\mathrm{a}}(x, y)$ メートルとすると, $f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である（定義域は適当に考えよう）. たとえば

$$f_{\mathrm{a}}(\text{富士山頂の経度}, \text{富士山頂の緯度}) = \text{富士山の標高}$$

である. ♢

例 1.7. いまこの瞬間の, 東経 x 度, 北緯 y 度の地点の地表における気圧を $f_{\mathrm{p}}(x, y)$ ヘクトパスカルとすれば, $f_{\mathrm{p}}(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である. ♢

■ グラフと等高線　区間 I で定義された 1 変数関数 $f \colon I \to \mathbb{R}$ の**グラフ**とは [17], $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\big\{\big(x, f(x)\big) \,|\, x \in I\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

のことである. 関数 f が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標平面 $\mathbb{R}^2$ の曲線になる. 図 1.1 は例 1.3, 1.4 の関数 f_1–f_5 のグラフである.

同様に 2 変数関数 $f \colon D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ に対して, $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\big\{\big(x, y, f(x, y)\big) \,|\, (x, y) \in D\big\}$$

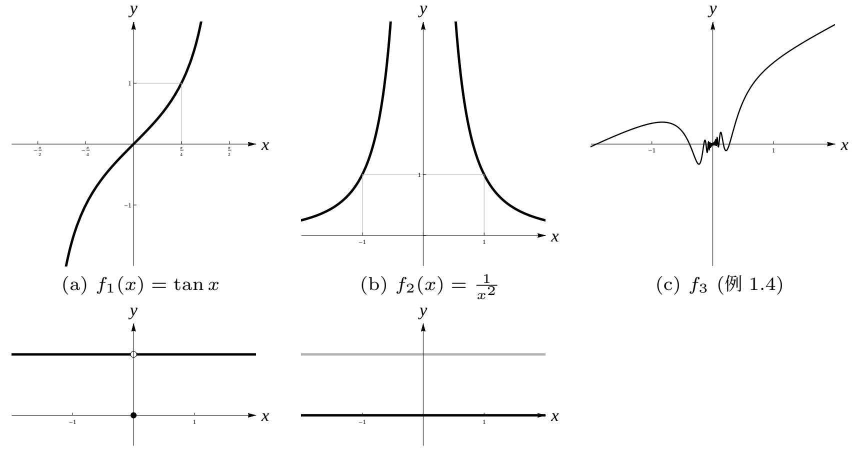
を f の**グラフ**という. 関数 f が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面になる.

一方, 2 変数関数 $f \colon D \to \mathbb{R}$ と定数 c に対して, 集合

$$\{(x, y) \in D \,|\, f(x, y) = c\}$$

[16] 2 変数関数の場合, $\mathbb{R}^2$ の点を (x_1, x_2) と書くかわりに (x, y) と書くことがある. このとき “$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である” ということもある. この講義では, 簡単のため, 主に 2 変数関数を扱うが, ほとんどの性質は一般の多変数関数に容易に拡張できる.

[17] 関数 f のグラフ: the graph of a function f.



(a) $f_1(x) = \tan x$　(b) $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$　(c) f_3（例 1.4）

(d) f_4（例 1.4）　(e) f_5（例 1.4）

図 1.1　例 1.3, 1.4 の関数のグラフ. 関数 f_5 のグラフの灰色の線は x 座標が有理数, y 座標が 1 である点の集合, 黒の線は x 座標が無理数, y 座標が 0 である点の集合を表している.

を, 関数 f の高さ c の**等高線**という [18]. 関数 f の高さ c の等高線は, 座標空間の xy 平面に平行な平面 $z = c$ によるグラフの切り口となっている. 関数 f が “性質がよい” もので, c が “適切な” 値であれば, 等高線は座標平面のなめらかな曲線になる. なめらかな曲線になるための条件は第 7 回で扱う.

2 変数関数のグラフや等高線は関数の変化の様子を表しているといってよい.

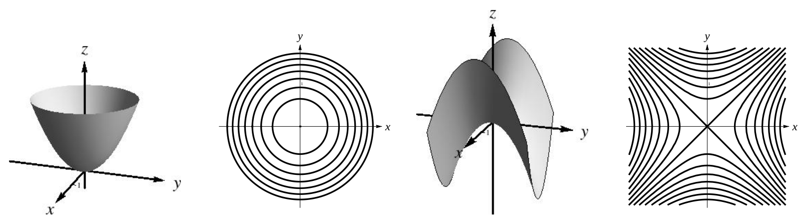
一般に n 変数関数 $f \colon \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ と定数 c に対して

$$\big\{\big(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\big) \,|\, (x_1, \dots, x_n) \in D\big\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\big\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \,|\, f(x_1, \dots, x_n) = c\big\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$$

をそれぞれ f の**グラフ**, 値 c の**等高面**または**等値集合**という.

例 1.8. (1)　$\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ の像は $[0, +\infty)$ である. いま $c \in (0, +\infty)$ に対して, 集合 $\{(x, y) | f_1(x, y) = c\}$ は, xy 平面上の原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の円である. これが f_1 の高さ c

[18] 等高線: the contour, the level curve, the level set.



(a) f_1 のグラフ・等高線　　(b) f_2 のグラフ・等高線

図 1.2　例 1.8

の等高線であるから，c の値を変化させていくと，等高線は原点を中心とする同心円を描く．このことから，f_1 のグラフは z 軸に垂直な平面できった切り口は円となる（図 1.2）．

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f_2(x,y)=x^2-y^2$ の像は $\mathbb{R}$ で，実数 c に対して集合 $\{(x,y)|f_2(x,y)=c\}$ は，xy 平面上の双曲線（$c=0$ のときは 2 本の直線）を与える．この関数のグラフと等高線は図 1.2）のようになる． $\diamondsuit$

■ **スカラ場**　例 1.6, 1.7 のように，関数 f が「座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点に対して実数が対応している」とみなせるとき，f を $\mathbb{R}^2$ 上の**スカラ場** [19] または平面のスカラ場という．例 1.6 で挙げた標高のスカラ場のグラフは地表そのものであり，等高線は地図で用いられる等高線である．また，例 1.7 で与えられるスカラ場の等高線は等圧線とよばれる．

同様に，3 変数関数が，座標空間の各点に対して実数を対応させているとみなせるとき，空間のスカラ場という [20]．

[19] スカラ場: a scalar field. 「スカラー場」と書くこともある．

[20] いまのところ，スカラ場は多変数関数と同義と思っていて良い．定義域が何がしかの「空間」「世界」であると思えるとき，スカラ場という言葉を使いたくなる．

問　題　1

1-1　次の対応は関数を与えるか：

(1) 実数 x に対して 3 乗すると x になるような実数 y を対応させる．

(2) 負でない実数 x に対して 4 乗すると x になるような実数 y を対応させる．

(3) 正の実数 x に対して $a^y=x$ となる y を対応させる．ただし a は正の定数である．

(4) 実数 x に対して $x=\tan y$ をみたす y を対応させる．

(5) 実数 x に対して $x=\tan y$ かつ $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ をみたす y を対応させる．

1-2　次は正しいか：区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上で定義された関数 f のグラフは存在しないことがある．

1-3　身の回りの量で，2 変数関数，3 変数関数... で表されるものの具体例を挙げなさい．

1-4　2 変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)\text{ のとき })\\ 0 & ((x,y)=(0,0)\text{ のとき })\end{cases}$$

に対して，次の値を求めなさい:

- $f(0,0)$, $f(1,1)$, $f(1,2)$, $f(1,3)$.
- $f(2,4)$, $f(3,6)$, $f(4,8)$.
- $f(a,ma)$ (m は定数, a は 0 でない定数).

1-5　例 1.5 の関数 f のグラフを描きなさい．また，高さ 1, 2, 3 ... の等高線を描きなさい．

1-6　例 1.8 を確かめなさい．

1-7　1 変数関数 F に対して，$f(x,y)=F(\sqrt{x^2+y^2})$ により 2 変数関数 f を定義する．

(1) f の等高線はどのような形になるか．

(2) f のグラフはどのような形になるか．

1-8　問題 1-4 の関数 f の等高線を描きなさい．

1-9　次のような意見に対して，有効な反論をなるべくたくさん挙げなさい：

> 3 変数関数, 4 変数関数 ... のグラフは描くことができない．したがって，このような関数を考えることに実用的な意味はない．