2. 偏微分

2.1　1 変数関数の微分 (復習)

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 1 変数関数 f と $a \in I$ に対して極限値

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{2.1}$$

が存在するとき，f は a で**微分可能**であるという．このとき，極限値 (2.1) を f の a における**微分係数**とよび，$f'(a)$ で表す [1]．定義域 I 上のすべての点で f が微分可能ならば，新しい関数

$$f' : I \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

が定まる．これを f の**導関数**とよぶ.

例 2.1.　(1)　関数 $f(x) = |x|$ は 0 で微分可能でない（図 2.1 (a)）.

(2)　$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ で与えられる関数 f は 0 で微分可能でない．実際

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{h}^2} \longrightarrow +\infty \qquad (h \to 0)$$

である．関数 f のグラフは，なめらかな曲線である（図 2.1 (b)）.

(3)　例 1.4 の (1) で挙げた関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる関数 f は 0 で (したがって $\mathbb{R}$ 全体で) 微分可能で，

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

[*] 2014 年 4 月 16 日 (2014 年 4 月 23 日訂正)

[1] 微分可能: differentiable; 微分係数: the differential coefficient; 導関数: the derivative; f': f-prime (通常 dash とは読まない).

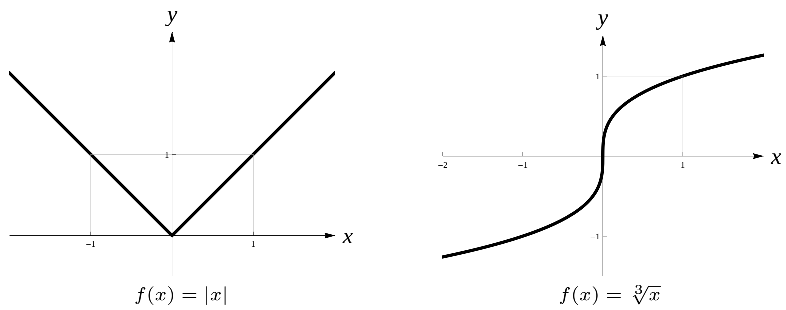

図 2.1　例 2.1

となる．実際，$|\sin x| \leqq 1$ に注意すれば，“はさみうちの原理” を用いて [2]

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h \sin\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

を得る.　◇

微分可能な関数 f を $y = f(x)$ と書き表したとき，

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

と書く．この記法は合成関数・逆関数の微分公式を覚えるのに便利であった．

微分可能な関数 f の導関数 f' が微分可能なとき，f' の導関数 f'' を f の **2 次導関数** (2 階微分)，$f''(x)$ の導関数を 3 次導関数. . . とよぶ [3]．一般に f $(y = f(x))$ の n 次導関数を

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

と書く．ここで $f^{(0)}(x) = f(x)$ と約束しておく.

[2] はさみうちの原理: the squeeze theorem.

[3] 2 次導関数: the second derivative; 3 次導関数: the third derivative; n 次導関数: the n-th derivative.

2.2 偏微分係数と偏導関数

領域[4] $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数

$$f\colon D \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$$

を考える．点 $(a,b) \in D$ において，極限値

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

がともに存在するとき，f は (a,b) で**偏微分可能**であるといって，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

を “f の (a,b) における x に関する (y に関する) **偏微分係数**” という．

さらに f が D の各点で偏微分可能なとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon D \ni (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in \mathbb{R}$$

は D で定義された 2 変数関数を与える．これを f の x に関する**偏導関数**または**偏微分**という[5] 同様に f の y に関する 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ も定義される．

記号 2.2.
- 偏導関数の記号 “∂” は**ディー**または**ラウンド・ディー**と読む．これを d と書くことはない．
- 1 行におさめたい時はは次のように書く．プライム ($'$) は用いない．

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

■ 偏導関数の計算 関数 f (関数 $f(x,y)$ ということがある) の x に関する偏導関数は，y の値を止めたまま x を変化させて得られる 1 変数関数の導関数とみなすことができる．したがって $f(x,y)$ が x, y の式で与えられているとき，f_x は $f(x,y)$ の y を定数として x に関して微分したものである．関数 $f(x,y)$ に対して $f_x(x,y)$ を求めることを「x で偏微分する」という．

[4] 用語 “領域 (a domain)” の意味は第 3 回に述べる．

[5] 偏微分可能: partially differentiable; x に関する偏導関数: the partial derivative with respect to x.

■ 2 階の偏導関数 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ がそれぞれ偏微分可能ならば 4 つの 2 変数関数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

を考えることができる．これらを f の **2 次偏導関数**という[6]．

例 2.3. 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^2$ に対して

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 6xy, \qquad f_y(x,y) = 3x^2 + 2y.$$

さらにこれを微分して次の 2 次偏導関数を得る：

$$f_{xx} = 6x + 6y, \qquad f_{xy} = 6x, \qquad f_{yx} = 6x, \qquad f_{yy} = 2. \qquad \diamondsuit$$

例 2.3 では f_{xy} (x で偏微分して，そのあと y で偏微分したもの) と f_{yx} (y で偏微分してから x で偏微分したもの) が一致する．これは偶然ではなく，**よく使われる状況では f_{xy} と f_{yx} は一致する．** これを**偏微分の順序交換定理**[7] という．この事実を正確に述べるには，2 変数関数の連続性の概念が必要なので，第 3 回で扱う．問題 2-7 は f_{xy} と f_{yx} が一致しない例である．

■ 高階の偏導関数 2 次偏導関数がさらに偏微分可能ならば，3 次偏導関数を考えることができる．一般に 2 変数関数 f ($f(x,y)$) の 3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \dots$$

などたくさんあるが，性質のよい関数ならば，たとえば上の 3 つは一致する (偏微分の順序交換定理)．このような場合，3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

の 4 通りとなる．さらに高次の偏導関数も考えることができる．

[6] 2 次偏導関数: the second partial derivatives.

[7] 偏微分の順序交換可能性: the commutativity of partial differentials.

■ **多変数関数の偏導関数**　一般に n 変数関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ の第 i 番目 $(i=1,\dots,n)$ の変数以外を定数とみなして微分して得られた関数を f の x_i に関する偏導関数または偏微分という．変数の個数が多い場合も，よく使われる状況では偏微分の順序交換が可能である：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \qquad (1 \leqq k, l \leqq n).$$

]

2.3　1 変数関数の連続性と微分可能性（復習と言葉の定義）

次回，多変数関数の連続性をあつかうための準備として，高等学校で学んだ 1 変数関数の連続性と微分可能性の復習をしておこう：区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された 1 変数関数 f が $a \in I$ で**連続**であるとは [8]

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである [9]．関数 f が定義域 I の各点で連続なとき f は I で連続である，あるいは**連続関数**であるという．

例 2.4.　(1)　次の関数（例 1.4 (2)）は 0 で連続でない：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

実際 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to -0} f(x) = 1$ であるが $f(0) = 0$.

(2)　次の関数 f は 0 で連続でない：

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

実際，数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$ で定めると，これらの極限値は 0 であるが,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$$

となるので $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．　◇

[8] 連続: continuous; 連続関数: a continuous function.

[9] すなわち x が a に近づくとき，その近づき方によらず $f(x)$ が $f(a)$ に近づく．例 2.4 (2) 参照．きちんとした極限の議論は後期に扱う.

定理 2.5. 1 変数関数 f が a で微分可能ならば a で連続である．

証明. 極限の性質から

$$\begin{aligned}\Bigl(\lim_{x\to a} f(x)\Bigr) - f(a) &= \lim_{x\to a}\bigl(f(x) - f(a)\bigr) = \lim_{h\to 0}\bigl(f(a+h) - f(a)\bigr) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right) = \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} h\right) \\ &= f'(a) \times 0 = 0. \qquad \square\end{aligned}$$

とくに f が定義域 I の各点で微分可能（このとき I で微分可能である，という）なら I で連続である．このとき導関数 f' は連続であるとは限らない（例 2.6 2.6）.

■ **C^r-級関数**　区間 I で定義された 1 変数関数 f に対して

- f が I で連続である，とき f は I で C^0-級である [10] という.
- f が I で C^1-級である，とは，f が I で微分可能で，かつ導関数 f' が I で連続であること，と定義する.
- 正の整数 k に対して f が I で C^k-級であるとは、f の k 次導関数 $f^{(k)}$ が存在して，それが I で連続となることである.
- 関数 f が全ての負でない整数 k に対して C^k-級であるとき，f は C^∞-級であるという.

例 2.6.

- 正の整数 m と実数 $a_0, \dots, a_m$ に対して

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_1 x + a_0$$

で与えられる関数を x の**多項式**という [11]．とくに $a_k = 0$ $(k \geqq 1)$ であるような多項式で与えられる関数 $f(x) = a_0$ を**定数関数** という．多項式は C^∞-級である.

- 例 2.1 (3) の関数 f は $\mathbb{R}$ で微分可能だが，C^1-級ではない．実際，例 2.4 の (2) から導関数 f' は 0 で連続でない.　◇

[10] C^0-級: of class C^0; C^r-級: of class C^r; C^∞-級: of class C^∞ (C-infinity).

[11] 多項式: a polynomial; 定数関数: a constant function.

問　題　2

2-1　問題 1-4 であげた関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

の偏導関数をすべて求めなさい

2-2　変数 (t,x) の 2 変数関数 $u(t,x)$ に関する関係式

$$(*)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

を**熱方程式** [12] という．関数

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

は方程式 $(*)$ を満足することを示しなさい．

2-3　変数 (t,x) の 2 変数関数 $u(t,x)$ に関する関係式

$$(**)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

を**波動方程式**という．関数

$$u(t,x)=a\sin(t+x)+b\sin(t-x)\qquad (a,\ b\ \text{は定数})$$

は方程式 $(**)$ を満足することを示しなさい．

2-4　2 変数関数 $f(x,y)$ が関係式

$$f_{xx}+f_{yy}=0$$

をみたしているとき，f は**調和関数**であるという．次の関数は調和関数であることを確かめなさい：

$$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$$

また，x, y の 3 次以下の多項式で調和関数となるものをすべて求めなさい．

[12] 熱方程式: the heat equation; 波動方程式: the wave equation; 調和関数: a harmonic function; 極小曲面: a minimal surface. これらの意味は第 8 回で少しだけ説明する．

2-5　3 変数関数 $f(x,y,z)$ が関係式

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$$

をみたしているとき，f を (3 変数の) **調和関数**という．1 変数関数 $F(t)$ を用いて

$$f(x,y,z)=F(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

という形でかけるような 3 変数関数 f が調和関数となるような F を求めなさい．

2-6　2 変数関数 $f(x,y)$ に関する関係式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)=0$$

をみたすとき，関数 f のグラフで与えられる曲面を**極小曲面**という．次の関数 (定義域はどこと考えるのがよいか) のグラフは極小曲面であることを確かめなさい：

$$f(x,y)=\log\bigl(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}\bigr),\qquad g(x,y)=\log\frac{\cos x}{\cos y}.$$

2-7　関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は 2 階偏微分可能であることを示し，2 次偏導関数を求めなさい．(テキスト 21 ページの問い 7 参照)．

2-8　一般に n 変数関数の 2 次偏導関数は何通りあるか．偏微分の順序交換ができる場合と，順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい．

2-9　一般に n 変数関数の m 次偏導関数は何通りあるか．偏微分の順序交換ができる場合と，順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい．