3. 連続性・微分可能性

■ 領域　座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**領域**であるとは，それが “ひと続きで端をもたない” ことである[1]．たとえば $\mathbb{R}^2$ 全体，開円板や開長方形[2]

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<r^2\},\qquad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a<x<b, c<y<d\}$$

は領域である．ただし実定数 r, a, b, c, d は $r>0$, $a<b$, $c<d$ をみたす．

■ 極限　$\mathbb{R}^2$ の領域 D から D の点 (a,b) を除いてできる領域[3] で定義された 2 変数関数 f が

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A \qquad \Bigl(f(x,y)\to A \qquad \bigl((x,y)\to(a,b)\bigr)\Bigr) \tag{3.1}$$

をみたすとは (x,y) が**どのような経路で** (a,b) **に近づいても** $f(x,y)$ の値が A に近づくことである[4]．このとき「$(x,y)\to(a,b)$ のとき $f(x,y)$ の極限値は A である[5]」という．とくに $(a+h,b+k)$ が (a,b) に近づくことは (h,k) が $(0,0)$ に近づくことと同じだから

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k). \tag{3.2}$$

事実 3.1. 2 変数関数 α, β, f が

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\alpha(h,k)=0,\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\beta(h,k)=0,\qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$$

をみたしているならば $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f\bigl(a+\alpha(h,k), b+\beta(h,k)\bigr)=A$.

事実 3.2.　(1)　(3.1) が成り立つための必要十分条件は，0 に収束する任意の2 組の数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して[6]

$$\lim_{n\to\infty} f(a+h_n, b+k_n)=A$$

が成り立つことである．

[*] 2014 年 4 月 23 日 (2014 年 4 月 30 日訂正)
[1] 領域: a domain; もう少し正確な意味はこの節末で述べる
[2] 開円板: an open disc; 開長方形: an open rectangle (rectangular domain).
[3] $(x,y)\to(a,b)$ のときの極限を考える際，f は (a,b) で定義されていなくてもよい（いてもよい）.
[4] 極限に関するもう少し厳密な議論は後期の微分積分学第二で扱う．ここでは以下を認めて議論をすすめる.
[5] 極限値：the limit.
[6] 任意（にんい）の: arbitrary; 任意の X に対して P が成り立つ: P holds for an arbitrary X.

(2)　(3.1) が成り立たないための必要十分条件は，数列 $\{f(a+h_n, b+k_n)\}$ が A に収束しないように，0 に収束する数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ をうまく選ぶことができることである．

例 3.3.　(1)　$\mathbb{R}^2$ 全体で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

を考える（問題1-4, 2-1 参照）．いま，$h_n=1/n$, $k_n=1/n$, $k'_n=-1/n$ で 3 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$, $\{k'_n\}$ を定めると，これらは 0 に収束し，

$$\lim_{n\to\infty} f(h_n,k_n)=1,\qquad \lim_{n\to\infty} f(h_n,k'_n)=-1$$

となる．この第 1 式と事実 3.2 (1) から，$(x,y)\to(0,0)$ のとき $f(x,y)$ は 1 以外の実数を極限値にもたない．また第 2 式から $f(x,y)$ は -1 以外の実数を極限値にもたない．これらから $(x,y)\to(0,0)$ のとき $f(x,y)$ は極限値をもたないことがわかる．

一方，0 でない y をひとつ固定して，1 変数関数の極限値をとると

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0 \quad だから \quad \lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Bigr)=0,$$

同様に

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0 \quad だから \quad \lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Bigr)=0.$$

(2)　$f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ は $(x,y)\to(0,0)$ としたときの極限値をもたない．一方，

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Bigr)=1,\qquad \lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Bigr)=-1.$$

(3)　$\mathbb{R}^2$ から $(0,0)$ を除いた領域で定義された関数 $f(x,y)=xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ は $(x,y)\to(0,0)$ としたとき極限値 0 をもつ．このことを確かめよう：正の数 r, 実数 θ を用いて $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と書くと，$(x,y)\to(0,0)$ となることと $r=\sqrt{x^2+y^2}=0$ となることは同値である．いま

$$f(x,y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \tag{$*$}$$

$$= \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\cos 2\theta = \frac{1}{4}r^2\sin 4\theta$$

だが，$|\sin 4\theta| \leqq 1$ だから

$$\left|\frac{r^2}{4}\sin 4\theta\right| \leqq \frac{r^2}{4} \qquad \text{すなわち} \qquad -\frac{r^2}{4} \leqq \frac{r^2}{4}\sin 4\theta \leqq \frac{r^2}{4}$$

なので $(*)$ の右辺は $r \to 0$ とすると 0 に近づく．◇

■ 連続性　1 変数関数の連続性（第 2.3 節）にならって 2 変数関数の連続性を次のように定義する：

定義 3.4. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f が点 $(a,b) \in D$ で**連続**であるとは，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

が成り立つことである．関数 f が定義域 D のすべての点で連続であるとき，f は D で連続，あるいは D 上の連続関数であるという．

例 3.5. (1)　例 3.3 の (1) の関数 f は $(0,0)$ で連続でない．しかし，偏微分可能で $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ である．

(2)　例 3.3 (3) でみたように，問題 2-7 であたえた関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続である．◇

一般に，多項式であらわされる関数は連続，有理式，すなわち多項式の商で表される関数は分母が 0 とならない点で連続である．

■ 微分可能性　例 3.5 の (1) のように，多変数関数は，偏微分可能であっても連続であるとは限らない．そのような関数を「微分可能」というのは健全ではないので，**微分可能性**の概念を別に定義する必要がある．

定義 3.6. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で**微分可能**であるとは，$(a+h, b+k) \in D$ となるような (h,k) に対して

$$(\star) \qquad f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

とおくと，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

となるように定数 A, B をうまくとれることである．

命題 3.7. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能で，$(\star)$ の定数 A, B は $A = f_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$ でなければならない．

証明. 式 $(\star)$ の $k=0$ として

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \frac{Ah + \varepsilon(h,0)\sqrt{h^2}}{h} = A + \varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}$$

だが，$-|\varepsilon(h,0)| \leqq \varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h} \leqq |\varepsilon(h,0)|$，かつ $h \to 0$ とすると $\varepsilon(h,0) \to 0$ だから

$$A = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = f_x(a,b).$$

一方 $h = 0$ とすることで $B = f_y(a,b)$ も得られる．□

命題 3.8. 関数 f が (a,b) で微分可能ならば (a,b) で連続である．

証明. 式 $(\star)$ の両辺で $(h,k) \to (0,0)$ とすればよい．□

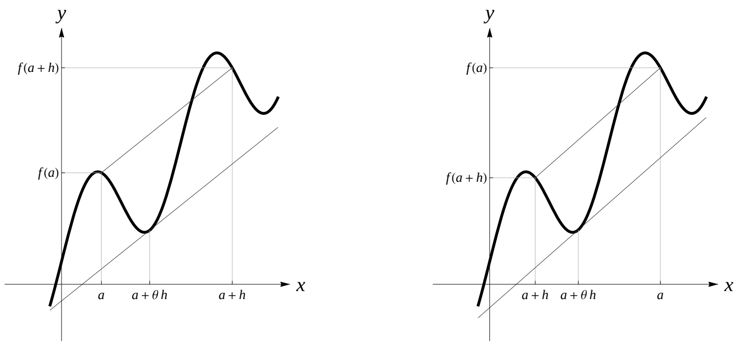
注意 3.9. 命題 3.7 の逆は成立しない．実際，例 3.3 (1) の f は $(0,0)$ で偏微分可能だが連続でない（例 3.5 参照）．したがって，命題 3.8 の対偶から微分可能でない．

■ 平均値の定理（復習）　2 変数関数の微分可能性と連続性の関係を明らかにするために，高等学校で学んだ 1 変数関数の平均値の定理を用いる [7]．

定理 3.10. 関数 f が区間 I で微分可能であるとき，点 $a \in I$ と $a + h \in I$ となるような h に対して，

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \qquad (0 < \theta < 1)$$

[7] 平均値の定理: the mean value theorem. 証明は後期の微分積分学第二で与える．



$h > 0$　　　　$h < 0$

図 3.1　平均値の定理 3.10

をみたす θ が存在する [8][9].

零でない数 h に対して，数直線上の点 a と $a+h$ の間にある点は $a+\theta h$ $(0<\theta<1)$ と表されるので，定理 3.10 の結論は，“$f(a+h)-f(a)=hf'(c)$ をみたす a と $a+h$ の間の数 c が存在する” と書き換えられる（図 3.1）.

■ 微分可能性の十分条件

命題 3.11. 領域 D で定義された 2 変数関数 f が D の各点で偏微分可能，かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である.

証明. 点 $(a,b)\in D$ で微分可能であることを示そう. $(\star)$ の $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ として $\varepsilon(h,k)\to 0$ $((h,k)\to(0,0))$ を示せばよい. 十分 0 に近い h, k に対して

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく. いま，k を一つ固定して

$$F(h):=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)$$

とおくと [10]，f の偏微分可能性から F は h の微分可能な関数で $F'(h)=f_x(a+h,b+k)$,

[8] 関数 f を与えたとき，θ は a と h に依存して定まる. 与えられた a, h に対して具体的に θ の値を求めることはそれほど重要ではない.

[9] 定理 3.10 はもう少し弱い仮定でも成り立つ. 実際，区間の端点 a, $a+h$ では f の連続性のみが必要で微分可能性は不要である. ここでは，記述の煩雑さを避けるため，今回の議論に必要な形で，少し強い仮定をつけることにする.

[10] 記号 “:=” は (ここでは) 左辺を右辺によって定義するという意味を表す.

$F(0)=0$ が成り立つ. そこで F に平均値の定理 3.10 を適用すると

$$F(h)=F(h)-F(0)=F'(0+\theta h)h=F'(\theta h)h=f_x(a+\theta h,b+k)h \qquad (0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する. 同様に $G(k)=f(a,b+k)-f(a,b)$ とおくと，k を定めるごとに

$$G(k)=G'(\delta k)k=f_y(a,b+\delta k)k \qquad (0<\delta<1)$$

をみたす δ をとることができる. したがって

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)&=\frac{F(h)+G(k)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\&=\bigl(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a,b)\bigr)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+\bigl(f_y(a,b+\delta k)-f_y(a,b)\bigr)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\end{aligned}$$

となるが，$|\theta h|<|h|$, $|\delta k|<|k|$ と，$|h/\sqrt{h^2+k^2}|\leqq 1$, $|k/\sqrt{h^2+k^2}|\leqq 1$ から，右辺は $(h,k)\to(0,0)$ のときに 0 に近づく. □

例 3.12. 命題 3.11 の逆は成立しない. 実際，

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で微分可能であるが f_x, f_y は原点で連続でない. ◇

■ 偏微分の順序交換定理

定理 3.13. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在してともに連続であるとき，$f_{xy}=f_{yx}$ が成立する.

証明. 点 $(a,b)\in D$ を固定して $f_{xy}(a,b)$ と $f_{yx}(a,b)$ が等しいことを示す. いま，

$$V=V(h,k):=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)}{hk}$$

とおく. ただし，h, k は十分 0 に近い数とする. このとき

$$V=\frac{1}{k}\frac{F(h)-F(0)}{h} \qquad \bigl(F(t):=f(a+t,b+k)-f(a+t,b)\bigr)$$

であるが，$F'(t)=f_x(a+t,b+k)-f_x(a+t,b)$ であることに注意して平均値の定理 3.10 を適用すれば，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{k}F'(\theta_1 h)=\frac{1}{k}\bigl(f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a+\theta_1 h,b)\bigr)\\&=\frac{1}{k}\bigl(F_1(k)-F_1(0)\bigr) \qquad (F_1(t):=f_x(a+\theta_1 h,b+t))\end{aligned}$$

となる $\theta_1 \in (0,1)$ が存在する．さらに $F_1'(t) = f_{xy}(a+\theta_1 h, b+t)$ に注意すれば，平均値の定理から次を満たす θ_1, θ_2 が存在することがわかる：

$$(\star) \qquad V = f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) \qquad \bigl(\theta_1, \theta_2 \in (0,1)\bigr).$$

同様に $V = (G(k)-G(0))/(hk)$ $(G(t) := f(a+h, b+t) - f(a, b+t))$ とすると

$$(\star\star) \qquad V = f_{yx}(a+\varphi_1 h, b+\varphi_2 k) \qquad \bigl(\varphi_1, \varphi_2 \in (0,1)\bigr)$$

となる φ_1, φ_2 が存在する．f_{xy}, f_{yx} の連続性から $(\star)$, $(\star\star)$ の $(h,k) \to (0,0)$ とする極限をとれば，$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ が成り立つことがわかる． □

■ **C^k-級関数**　領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f に対して

- f が D で連続であるとき，f は D で C^0-級であるという．
- f が D で C^1-級であるとは D の各点で偏微分可能で，f_x, f_y が D で連続となることである．
- f が D で C^2-級であるとは，f の 2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} が存在して，さらにそれらがすべて D で連続であることである．
- 正の整数 k に対して f が D で C^k-級であるとは，f の k 次偏導関数が存在し，それらがすべて D 上で連続となることである．
- f が C^∞-級であるとは，すべての負でない整数 k に対して C^k-級となることである．

この言葉を用いれば，

系 3.14. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が

(1)　微分可能ならば C^0-級である（命題 3.8）．

(2)　C^1-級ならば微分可能である（命題 3.11）．

(3)　$k \leqq m$ のとき C^m-級ならば C^k-級である．

(4)　C^2-級ならば $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ（定理 3.13）．

領域について

この節の冒頭で "領域" のいい加減な定義を与えた．整合性のため，ここで領域の定義を与えるが，当面はあまり気にしなくてよい．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の**連続な道**とは，閉区間 $I = [a,b]$ で定義されたふたつの連続関数 x, y の組で与えられる対応 [11]

$$\gamma = (x,y)\colon I \ni t \longmapsto \gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \in \mathbb{R}^2$$

である．このとき $\mathbb{R}^2$ の点 $\gamma(a)$，$\gamma(b)$ をそれぞれ道 γ の**始点**, **終点**とよぶ.

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**連結**であるとは，D の各点 P, Q に対して P を始点，Q を終点とする連続な道 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ で各 $\gamma(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が D の点となるものが存在することをである．（この概念は正確には "弧状連結性" という）．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 $P = (a,b)$ と正の実数 ε に対して

$$U_\varepsilon(P) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合を "点 P を中心とした半径 ε の**円板**"， あるいは "P を中心とする ε-円板" the ε-disc centered at P という．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**開集合** [12] であるとは D の各点 P に対して $U_\varepsilon(P) \subset D$ となるような正の数 ε をとることができることである．

ここでは証明を与えないが，次の事実は重要である：

事実． 連続関数 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して，次の集合は開集合である：

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) > 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の連結かつ開集合となる部分集合を**領域**という.

問　題　3

3-1　例 3.3, 3.5, 3.12 を確かめなさい．

3-2　2 変数関数が連続であること，偏微分可能であること，微分可能であること，C^1-級であることの間の関係を整理しなさい．
例：微分可能 $\Rightarrow$ 連続；連続 $\not\Rightarrow$ 微分可能．実際 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ で連続だが微分可能でない．

3-3　数直線上の区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が I 上で恒等的に 0 ならば f は I 上で定義された定数関数である．このことを，平均値の定理を用いて証明しなさい．

3-4　区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が常に正の値をとるならば，f は I 上で単調増加である．このことを，平均値の定理を用いて証明しなさい．ただし，1 変数関数 f が区間 I で単調増加であるとは "I 上の 2 点 x_1, x_2 が $x_1 < x_2$ をみたすならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ" ことである．

[11] 写像 (a mapping) という．いままで考えてきた関数は実数を値にとるが，ここでの γ は座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点を値にとる．一般に "対応の規則" を写像というが，値域が数の集合のときは関数とよぶ．
[12] 開集合: an open set; 連結集合: a connected set; 円板: a disc (disk).