4. 初等関数

高等学校では，微積分の対象として，多項式・有理式・冪(べき)乗根・指数関数・対数関数・三角関数と，具体的な関数を扱った[1)]．ここでは，高等学校で学ばなかったいくつかの関数の定義，性質をまとめておく．

■ 三角関数の記号　高等学校で学んだ**余弦** cosine, **正弦** sine, **正接** tangent の他に，次の記号を用いることがある：

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x := \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x := \frac{1}{\sin x}. \tag{4.1}$$

これらをそれぞれ **余接** cotangent, **正割** secant, **余割** cosecant という[2)] これらの記号は，

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \tag{4.2}$$

のように使う．

例 4.1. 次が成り立つ[3)]：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x, && \frac{d}{dx}\cot x = -(1+\cot^2 x),\\
&\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, && \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x,\\
&\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|, && \int \cot x\,dx = \log|\sin x|.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

さらに，問題 4-10 で見るように次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|,\\
&\int \csc x\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|. \qquad \diamondsuit
\end{aligned} \tag{4.4}$$

[*)]2014 年 4 月 30 日 (2014 年 5 月 14 日訂正)

[1)]有理式：a rational function; 冪乗根（巾乗根とも書くが，これは嘘字）：a radical root; 平方根：the square root; 立方根：the cubic root; n-乗根：the n-th root；指数関数：the exponential function; 対数関数：the logarithmic function; 三角関数：the trigonometric functions, the circular functions.

[2)]余割は "cosec" とも書く．また $\sec x = (\cos x)^{-1}$ だが，これを $\cos^{-1} x$ とは書かないのが普通である．

[3)]式が煩雑になるのを避けるために，ここでは原始関数における任意定数を省略する．

■ 逆三角関数

定義 4.2.
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \cos y$, $0 \leqq y \leqq \pi$ をみたす y を $y = \cos^{-1} x$ と書く．
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ をみたす y を $y = \sin^{-1} x$ と書く．
- 与えられた実数 x に対し $x = \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ をみたす y を $y = \tan^{-1} x$ と書く．

これら $\cos^{-1} x, \sin^{-1} x, \tan^{-1} x$ をそれぞれ**逆余弦関数**，**逆正弦関数**，**逆正接関数**といい，これらをまとめて**逆三角関数**とよぶ[4)]．

例えば，次が成り立つ[5)]：

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{5}{12}\pi, \quad \tan^{-1}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}.$$

逆余弦，逆正弦，逆正接をそれぞれ arccos, arcsin, arctan と書くこともある．

例 4.3. (1)　任意の x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$.
実際，$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x\right) = \cos(\cos^{-1} x) = x$．ここで，$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$ だから $-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x \leqq \frac{\pi}{2}$ なので，$\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$.

(2)　$\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$，$4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$.
実際，$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$, $\beta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$ とすると，$\tan\alpha = \frac{1}{2}$，$\tan\beta = \frac{1}{3}$ だから，正接の加法公式を用いれば $\tan(\alpha+\beta) = 1$．ここで，$\tan^{-1} x$ が単調増加であることに気をつければ

$$0 < \beta < \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2} < \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

したがって $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ なので $\alpha + \beta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ となり第 1 式が得られた．正接の 4 倍角の公式を用いれば第 2 式が得られる（問題 4-4）[6)]．　$\diamondsuit$

[4)]逆余弦：arc cosine; 逆正弦：arc sine; 逆正接: arc tangent; 逆三角関数：inverse trigonometric functions.

[5)]と書いてあったらとりあえず確かめよ．

[6)]例 4.3 (2) の第二式をマチン Machin の公式という．少し昔の円周率の高精度計算にはこの公式が用いられた（本節の「余談」参照）．

命題 4.4. 逆三角関数の導関数は次で与えられる：

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\ &\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

証明. まず，$y=\cos^{-1}x$ とすると $x=\cos y$ であるから，逆関数の微分公式から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{-1}{\sin y}.$$

ここで $0 \leqq y \leqq \pi$ だから，$\sin y \geqq 0$ なので $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ となり第 1 式を得る．第 2 式は例 4.3 の (1) と第 1 式から得られる．また，$\tan^{-1}x$ の微分公式を得るには例 4.1 の微分公式を用いればよい（問題 4-2）． □

ただし $\cos^{-1}x$, $\sin^{-1}x$ は $x=\pm 1$ で微分可能でない．

公式 (4.5) から

$$(4.6)\qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$$

が成り立つことがわかる．ただし第 2 式では $-1 \leqq x \leqq 1$ とする．とくに $\tan^{-1}0=0$, $\sin^{-1}0=0$ なので

$$(4.7)\qquad \tan^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \sin^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

が成り立つ．

■ 初等関数　多項式，冪関数 (x^α の形．冪乗根を含む)，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数に加減乗除，合成の操作を**有限回**施すことによって得られる関数を**初等関数**[7] という．初等関数はその定義域に含まれる開区間上で C^∞-級である[8]．

微分公式から，初等関数の導関数は初等関数であることがすぐにわかるが，初等関数の原始関数は初等関数であるとは限らない．原始関数が初等関数で表されるような積分計算の基本テクニックを演習問題に挙げておく．

[7] 初等関数：elementary functions.
[8] ただし冪乗根 $\sqrt[n]{x}$，非整数冪 x^α の定義域は $\{x | x>0\}$ としておく．

■ 双曲線関数

定義 4.5. 実数 x に対して

$$\begin{aligned} &\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2},\\ &\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{aligned}$$

をそれぞれ x の**双曲的余弦**，**双曲的正弦**，**双曲的正接**とよび，これらを**双曲線関数**という[9][10]．

双曲線関数は次の性質をもつ：

命題 4.6. (1)　恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ[11][12]．

(2)　加法定理：
$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y,\\ \sinh(x+y) &= \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y,\\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}. \end{aligned}$$

(3)　微分公式：
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x,\quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x,\quad \frac{d}{dx}\tanh x = 1-\tanh^2 x.$$

(4)　積分公式：
$$\int \cosh x\,dx = \sinh x,\quad \int \sinh x\,dx = \cosh x,\quad \int \tanh x\,dx = \log\cosh x.$$

[9] 双曲的余弦：hyperbolic cosine; 双曲的正弦：hyperbolic sine; 双曲的正接：hyperbolic tangent; 双曲線関数：hyperbolic functions.
[10] 双曲的余弦 $\cosh t$ と，角度 ht の余弦 $\cos ht$ を混同しないように．印刷物であれば，立体と斜体のフォントの使い分けで 明確に区別できる．
[11] 三角関数と同様に $\cosh^2 x$ は $(\cosh x)^2$ を表す．
[12] とくに $\bigl(x(t),y(t)\bigr)=(\cosh t,\sinh t)$ は xy 平面の双曲線 $x^2-y^2=1$ の右半分のパラメータ表示となる．これが双曲線関数の名前の由来である．

余談：円周率の近似

実数 t に対して，初項 1, 公比 $-t^2$ の等比級数の和の公式

$$1-t^2+t^4-\dots+(-1)^N t^{2N}=\frac{1-(-t^2)^{N+1}}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}+\frac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}$$

を $t=0$ から x まで定積分すると，式 (4.7) から

$$\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=x-\frac{1}{3}x^3+\dots+\frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1}+R_N(x)$$
$$\left(R_N(x)=\int_0^x\frac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt\right)$$

を得る．ここで

$$|R_N(x)|=\int_0^{|x|}\frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt\leqq\int_0^{|x|}t^{2N+2}\,dt=\frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$
$$|R_N(x)|=\int_0^{|x|}\frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt\geqq\int_0^{|x|}\frac{t^{2N+2}}{1+x^2}\,dt=\frac{1}{2N+3}\frac{|x|^{2N+3}}{1+x^2}$$

なので，

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1}+R_N(x)=\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right)+R_N(x),\tag{4.8}$$
$$\frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)(1+x^2)}\leqq|R_N(x)|\leqq\frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$

が成り立つ．これは後期に扱うテイラーの定理の特別な場合である．とくに $|x|\leqq 1$ とすると

$$\lim_{N\to\infty}R_N(x)=0\qquad(-1\leqq x\leqq 1\text{ のとき})$$

が成り立つので，逆正接関数の無限級数表示

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\qquad(-1\leqq x\leqq 1)\tag{4.9}$$

が得られた．

とくに (4.9) で $x=1$ とすると，

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots\tag{4.10}$$

が得られる．この右辺を適当な項まで計算すれば，円周率の近似値が得られる．誤差の項を $\widetilde{R}_N$ とすると (4.8) の $R_N(1)$ の形から

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\dots+\frac{(-1)^N}{2N+3}\right)+\widetilde{R}_N,\qquad\frac{2}{2N+3}\leqq|\widetilde{R}_N|\leqq\frac{4}{2N+3}$$

が成り立つことがわかる．この式を用いて円周率を小数 100 位まで求めることを考えよう：誤差 $|\widetilde{R}_N|$ が 10^{-100} を超えないようにするには $N\geqq 10^{100}-\frac{3}{2}$ が必要，$N\geqq 2\times10^{100}-\frac{3}{4}$ が十分である (!).

一方，例 4.3 (2) の第 2 式（マチンの公式）の各項に公式 (4.8) を用いると，$\alpha=1/5$, $\beta=1/239$ として

$$\pi=4\left(\sum_{k=0}^{M}\frac{4(-1)^k\alpha^{2k+1}}{2k+1}-\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j\beta^{2j+1}}{2j+1}\right)+R_{M,N},\tag{4.11}$$
$$|R_{M,N}|\leqq\frac{16\alpha^{2M+3}}{2M+3}+\frac{4\beta^{2N+3}}{2N+3}$$

となる．とくに $R_{M,N}$ が 10^{-100} を超えないためには $M=100$, $N=20$ くらいあれば十分である．公式 (4.10) を用いた計算 (10^{100} 項くらい必要) と比較せよ．

問　題　4

4-1 逆三角関数，正割，余割，余接関数のグラフを描きなさい．

4-2 (4.3), (4.5) を確かめなさい．

4-3 (1) $\cosh x\geqq 1$, $-1<\tanh x<1$ であることを確かめなさい．

(2) $\cosh x$ は偶関数，$\sinh x$, $\tanh x$ は奇関数であることを確かめなさい．

(3) グラフ $y=\cosh x$, $y=\sinh x$, $y=\tanh x$ を描きなさい．

(4) 命題 4.6 を示しなさい．

(5) 三角関数にならって，双曲線関数の 2 倍角の公式，3 倍角の公式，半角の公式，積和公式，和積公式をつくりなさい．

(6) $t=\tanh\frac{u}{2}$ とおくとき，$\cosh u$, $\sinh u$ を t で表しなさい．

(7) A, B を定数とするとき，$A\cos t+B\sin t$ は $r\cos(t+\alpha)$, $r\sin(t+\beta)$ の形に表すことができる (合成公式)．これにならって，双曲線関数の合成公式をつくりなさい．

(8) $x\geqq 1$ を満たす x に対して，$x=\cosh y$, $y\geqq 0$ をみたす y を $y=\cosh^{-1}x$ と書くと

$$\cosh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

となることを確かめなさい．同様に $\sinh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ を定義し，

$$\sinh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr), \qquad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

であることを確かめなさい．

4-4 (1) マチンの公式（例 4.3 (2) の第 2 式）が成り立つことを確かめなさい．

(2) 式 (4.11) の $M=2$, $N=1$ として円周率の近似値を求めなさい．小数第何位まで正しい値が得られるか．

4-5 (1) $\log x = (x)' \log x$ であることを用いて $\log x$ の原始関数を求めなさい．

(2) $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ の原始関数を求めなさい．

4-6 負でない整数 n に対して $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ とおく．とくに $n \geqq 2$ のとき $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成り立つことを示し，

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{2m-1}{2m}\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n=2m), \\ \dfrac{2m}{2m+1}\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdots\dfrac{2}{3} & (n=2m+1) \end{cases}$$

であることを確かめなさい．ただし m は正の整数である．さらに $\sin^n x$ の積分についても同様のことを行いなさい．

4-7 $\sqrt{1-x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい．

(1) $x = \sin\theta$ と置換する．

(2) $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ と置換する．

4-8 $f(x) = (x-1)(x-2)(x+1)^2$ とするとき，$1/f(x)$ の原始関数を求めなさい (部分分数分解).

4-9 定数 a, b に対して $1/(x^2-2ax+b)$ の原始関数を次の場合に求めなさい．

(1) $a^2 - b = 0$ の場合, すなわち $1/(x+a)^2$ の原始関数．

(2) $a^2 - b > 0$ の場合 (部分分数分解).

(3) $a^2 - b < 0$ の場合：$1/(1+u^2)$ の原始関数に帰着させる．

4-10 正割，余割の積分公式 (4.4) を次のようにして導きなさい：

(1) $t = \tan\frac{x}{2}$ と置換すると被積分関数は t の有理式となるので，部分分数分解して積分する．

(2) $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ とおいて $u = \sin x$ と置換する．

(3) $\frac{1}{\cos x} = \cosh u$ と置換する．

4-11 関数 $1/\sqrt{1+x^2}$ の原始関数は次で与えられることを確かめなさい：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \sinh^{-1} x.$$

4-12 $\sqrt{1+x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい：

(1) $(x)'\sqrt{1+x^2}$ とみなして部分積分を行うことにより，$1/\sqrt{1+x^2}$ の積分に帰着する．

(2) $x = \tan\theta$ と置換する．

(3) $x = \sinh u$ と置換する．

4-13 次の関数の原始関数を求めなさい：

$$\frac{1}{1-x^4}, \qquad \frac{1}{1-x^3}, \qquad \frac{1}{1+x^4}.$$