# 5. 全微分・方向微分

■ **全微分と近似式**　第3回で与えた微分可能性の定義3.6と命題3.7からただちに次のことがわかる：

**定理 5.1.** 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で微分可能であるための必要十分条件は，$f$ が $(a,b)$ で偏微分可能で，

$$(5.1) \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0,$$

$$\left(\varepsilon(h,k) := \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

が成り立つことである．

関数 $f(x,y)$ が定義域の点 $P=(a,b)$ で微分可能であるとき，

$$(df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

で与えられる2次行ベクトル $(df)_P$ を**関数 $f$ の点 $P$ における全微分**または**微分**という [1]．さらに，$(x,y)$ に対して2次行ベクトル $\bigl(f_x(x,y), f_y(x,y)\bigr)$ を対応させる規則

$$(5.2) \qquad df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

を $f$ の**全微分**または**微分**という．

**例 5.2.** 関数 $\varphi(x,y)=x$, $\psi(x,y)=y$ に対して $d\varphi=(1,0)$, $d\psi=(0,1)$ である．このことを次のように書く：$dx=(1,0)$, $dy=(0,1)$. ♢

例5.2の記号を用いれば (5.2) は

$$(5.3) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

と書くことができる．これが通常の全微分の表し方である．

*) 2014年5月14日 (2014年5月21日訂正)

[1] 行ベクトル：a row vector; 列ベクトル：a column vector; 全微分：a total differential; 微分：a differential.



全微分の記号を用いれば，微分可能性（定理5.1）は次のように言い換えられる：

**命題 5.3.** 2変数関数 $f$ が点 $P=(a,b)$ で微分可能なとき，

$$(5.4) \qquad f(a+h,b+k)-f(a,b) = (df)_P\boldsymbol{h} + \varepsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|$$

$$\left(\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{h}| = \sqrt{h^2+k^2}\right)$$

と書くと $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \varepsilon(\boldsymbol{h}) = 0$ が成り立つ．ただし $(df)_P\boldsymbol{h}$ は行ベクトルと列ベクトルの積として得られる $1\times 1$ 行列で，これをスカラとみなしている [2][3]．また $\boldsymbol{0} = {}^t(0,0)$ である．

**例 5.4.** 式 (5.4) の最後の項は，$|\boldsymbol{h}|$ が十分小さいときはそれにくらべてずっと小さくなるので，$(h,k)$ を $(\Delta x, \Delta y)$ と書けば，これが $(0,0)$ に十分に近いときは，近似式

$$(5.5) \qquad \Delta f \doteqdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y,$$

$$\bigl(\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)\bigr)$$

が成り立つ．ただし $\doteqdot$ はおよそ等しいことを表す．式 (5.5) と (5.3) が形の上で似ていることに気をつけておこう．この近似式の誤差については，後期にテイラーの定理を扱う際に考察する． ♢

■ **曲線に沿う微分**　数直線上の区間 $I$ 上で定義された1変数関数 $x(t)$, $y(t)$ の組 $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ は $I$ から座標平面 $\mathbb{R}^2$ への写像と思える：

$$\gamma\colon I \ni t \longmapsto \gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \in \mathbb{R}^2.$$

[2] 行列：a matrix; スカラ：a scalar.

[3] ここで $(x,y)$ の $(a,b)$ からの変化 $(h,k)$ を，行ベクトルではなく列ベクトル ${}^t(h,k)$ で表している．“行列を掛ける” という文脈ではベクトルは，通常，列ベクトルで表す．この記法に合わせるならば $\boldsymbol{x} = {}^t(x,y)$ と列ベクトルで表し，$f(x,y)$ の代わりに $f(\boldsymbol{x})$ と書くのが自然である．このとき，式 (5.4) は

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = (df)_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{h} + \varepsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|$$

と書ける．この方がすっきりするはずだが，座標平面上の点の座標を横に並べる高等学校の教科書の記号を慮って，ここにあるような “まぜこぜ” な記号を用いた．

このような写像を**曲線**あるいは**曲線のパラメータ表示**，**曲線の助変数表示**という[4]．以下，曲線と言えば $x(t)$, $y(t)$ が 1 変数関数として微分可能となるもののみを考える[5]．このことをとくに断るときは “$\gamma$ は微分可能” という．

曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して

$$\dot\gamma(t)=\frac{d\gamma}{dt}(t)=\bigl(\dot x(t),\dot y(t)\bigr)=\left(\frac{dx}{dt}(t),\frac{dy}{dt}(t)\right)$$

を曲線上の点 $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ における**速度ベクトル**という[6]．パラメータ $t$ の値を時刻とみなし，$\gamma(t)$ を時刻 $t$ における点の位置とみなすことによって，曲線 $\gamma(t)$ は平面上の点の運動を表していると考えられる．このとき，速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ は時刻 $t$ における運動する点の**速度**とみなすことができる．

**例 5.5.** (1)　列ベクトル $\boldsymbol{v}={}^t(v_1,v_2)$ と点 $P=(a,b)$ に対して

$$\gamma(t)=\bigl(a+tv_1,b+tv_2\bigr)$$

は $t=0$ で点 $P$ を通り一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で直線上を運動する点，すなわち $P$ を通り $\boldsymbol{v}$ に平行な直線を表す（図 5.1 左）．

(2)　パラメータ $s$ に対して $\sigma(s)=(\cos s,\sin s)$ $(-\pi<s<\pi)$ は原点を中心とする半径 1 の円から $(-1,0)$ を除いた部分を表す[7]．速度ベクトルは $(-\sin s,\cos s)$ となるから，速さは 1 で一定である（図 5.1 中央）．

(3)　次も原点を中心とする半径 1 の円から $(-1,0)$ を除いた図形を表す：

$$\tilde\sigma(t):=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\qquad(-\infty<t<\infty).$$

この式で $t=\tan\frac{s}{2}$ とすると，(2) の表示が得られる（図 5.1 右）．◇

さて，2 変数関数 $f(x,y)$ と曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して

$$F(t)=f\bigl(x(t),y(t)\bigr)\tag{5.6}$$

[4] 曲線：a curve; 曲線のパラメータ表示：a parametric representation of the curve.

[5] だからといって $\gamma$ が “なめらか” な曲線になるとは限らない．たとえば曲線 $\gamma(t)=\bigl(t-\sin t,1-\cos t\bigr)$ はサイクロイド the cycloid を与える．このパラメータ表示の 2 つの成分はともに微分可能（さらに $C^\infty$-級）であるが，$t=2n\pi$ に対応する点 $(2n\pi,0)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$ で尖った形をしている．

[6] 速度ベクトル：the velocity vector; 速さ：the speed．違いを思い出しておこう．

[7] 直線：a line; 円：a circle.



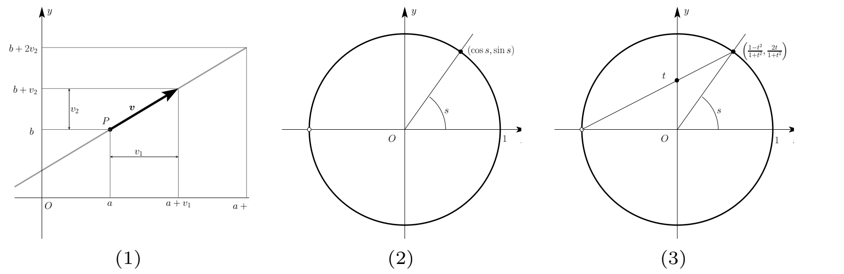


図 5.1　例 5.5

は，1 変数関数を与える．

**命題 5.6.** 微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ と微分可能な曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して，(5.6) は 1 変数関数として微分可能で

$$\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ．

**証明．** 実数 $t$ を一つ固定して，$\delta$ の 1 変数関数 $\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$ を

$$\varepsilon_1(\delta):=\frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta}-\dot x(t),\qquad \varepsilon_2(\delta):=\frac{y(t+\delta)-y(t)}{\delta}-\dot y(t)$$

とおけば，$x(t)$, $y(t)$ の微分可能性より $\delta\to0$ のとき $\varepsilon_j(\delta)\to0$ $(j=1,2)$ が成り立つ．さらに

$$h(\delta):=\delta\bigl(\dot x(t)+\varepsilon_1(\delta)\bigr),\qquad k(\delta):=\delta\bigl(\dot y(t)+\varepsilon_2(\delta)\bigr)$$

とおけば，$\delta\to0$ のとき $h$, $k\to0$ が成り立つ．これらの記号を用いて，$f$ の微分可能性に注意すれば，

$$\begin{aligned}F(t+\delta)-F(t)&=f\bigl(x(t+\delta),y(t+\delta)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)\\&=f\bigl(x(t)+h(\delta),y(t)+k(\delta)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)h(\delta)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)k(\delta)+\varepsilon\bigl(h(\delta),k(\delta)\bigr)\sqrt{h(\delta)^2+k(\delta)^2}\end{aligned}$$

となる．ただし $\varepsilon(h,k)$ は $(h,k)\to(0,0)$ のときに 0 に近づく関数である．したがって，

$$\begin{aligned}\frac{F(t+\delta)-F(t)}{\delta}&\\ &=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\bigl(\dot{x}(t)+\varepsilon_1(\delta)\bigr)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\bigl(\dot{y}(t)+\varepsilon_2(\delta)\bigr)\\ &\qquad+\varepsilon\bigl(h(\delta),k(\delta)\bigr)\frac{|\delta|}{\delta}\sqrt{\bigl(\dot{x}(t)+\varepsilon_1(\delta)\bigr)^2+\bigl(\dot{y}(t)+\varepsilon_2(\delta)\bigr)^2}.\end{aligned}$$

ここで $\delta\to0$ のとき $\varepsilon_j(\delta)\to0$, $(j=1,2)$，また $\bigl(h(\delta),k(\delta)\bigr)\to(0,0)$ なので $\varepsilon(h(\delta),k(\delta))\to0$．さらに $\bigl||\delta|/\delta\bigr|=1$ であることに注意すると

$$F'(t)=\lim_{\delta\to0}\frac{F(t+\delta)-F(t)}{\delta}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\dot{x}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\dot{y}(t)$$

を得る． □

命題 5.6 の結論の式は

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(df)\dot{\gamma}$$

などと書くことができる．ここで，$df$ は行ベクトル，速度ベクトル $\dot{\gamma}$ は列ベクトルとみなしている．

■ **方向微分**　例 5.5 (1) で挙げた，点 $P=(a,b)$ を出発して一定の速度 $\boldsymbol{v}={}^t(v_1,v_2)$ で動く点の運動

$$\gamma(t)=\bigl(a+v_1t,b+v_2t\bigr)$$

を考えよう．

**定義 5.7.** 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f$ が，点 $P=(a,b)\in D$ において $\boldsymbol{v}={}^t(v_1,v_2)$ 方向に**方向微分可能**であるとは，1 変数関数

$$F(t):=f(a+v_1t,b+v_2t)$$

が $t=0$ で微分可能となることである．このとき，微分係数 $F'(0)$ を $f$ の $P$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**とよぶ[8]．

さらに $f$ が $P$ で単に**方向微分可能**であるとは，どんなベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しても $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分可能となることである．

[8] 方向微分：the directional derivative.



とくに，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=(df)_P\boldsymbol{e}_1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=(df)_P\boldsymbol{e}_2$$

$$\bigl(\boldsymbol{e}_1={}^t(1,0),\boldsymbol{e}_2={}^t(0,1)\bigr)$$

である．

命題 5.6 から次がわかる：

**命題 5.8.** 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f$ が $P=(a,b)\in D$ で微分可能なら $f$ は $P$ で方向微分可能である．とくに $\boldsymbol{v}={}^t(v_1,v_2)$ 方向の方向微分は次で与えられる：

$$(df)_P\boldsymbol{v}=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)v_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v_2. \tag{5.7}$$

**注意 5.9.** 命題 5.8 の逆は正しくない（問題 5-7）．

■ **グラフと接平面**　領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された微分可能な関数 $f$ に対して，そのグラフを $S$，$P=(a,b)\in D$ に対応する $S$ 上の点を $\widehat{P}$ とする：

$$S:=\{\bigl(x,y,f(x,y)\bigr)\mid(x,y)\in D\}\subset\mathbb{R}^3,\qquad \widehat{P}:=\bigl(a,b,f(a,b)\bigr).$$

時刻 $t=0$ で $P$ を通る $(x,y)$ 平面上の曲線

$$\gamma(t):=\bigl(x(t),y(t)\bigr)\qquad\bigl(x(0)=a,\ y(0)=b\bigr)$$

に対応するグラフ $S$ 上の曲線

$$\hat{\gamma}(t)=\Bigl(x(t),y(t),f\bigl(x(t),y(t)\bigr)\Bigr) \tag{5.8}$$

は $t=0$ で $\widehat{P}$ を通る空間曲線を与えている．命題 5.6 を用いれば $\hat{\gamma}$ の $t=0$ での速度ベクトルは次で与えられることがわかる：

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(0)&=\bigl(\dot{x}(0),\dot{y}(0),f_x(a,b)\dot{x}(0)+f_y(a,b)\dot{y}(0)\bigr)\\ &=\dot{x}(0)\bigl(1,0,f_x(a,b)\bigr)+\dot{y}(0)\bigl(0,1,f_y(a,b)\bigr).\end{aligned} \tag{5.9}$$

このベクトルは点 $\widehat{P}$ で曲面 $S$ に接しているとみなせるから，関数 $f$ のグラフ $S$ の，点 $\widehat{P}$ における**接平面**は[9]，(5.8) の形をした任意の曲線 $\hat{\gamma}$ の速度ベ

[9] 接平面：the tangent plane.

クトル (5.9) に平行でなければならない．そのためには，接平面はベクトル

$$\big(f_x(a,b), f_y(a,b), -1\big) \tag{5.10}$$

に垂直でなければならないから，次が得られる [10)]：

**事実 5.10.** 領域 $D$ で定義された微分可能な関数 $f$ のグラフ $S$ の点 $\widehat{P} = \big(a, b, f(a,b)\big)$ における接平面は，点 $\widehat{P}$ を通り (5.10) に垂直な平面である．

とくに，接平面の方程式は

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - \big(z - f(a,b)\big) = 0$$

で与えられる．

**■ 勾配ベクトル**　点 $P = (a,b)$ の近くで定義された微分可能な関数 $f$ に対してベクトル

$$\operatorname{grad} f_P := \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$$

のことを $f$ の $P$ における**勾配ベクトル**という [11)]．これを用いると，方向微分 (5.7) は

$$(df)_P\boldsymbol{v} = \big(\operatorname{grad} f_P\big)\cdot\boldsymbol{v}$$

と内積 “$\cdot$” を用いて表すことができる．勾配ベクトル $\operatorname{grad} f_P$ が零ベクトルでないとき，このベクトルは $P$ を通る $f$ の等高線に垂直な方向を与えている（問題 5-6）．

[10)] ここでは，曲線の接線と同様に，曲面の接平面の定義は与えない．したがって，事実 5.10 は定理とはいえない．

[11)] 勾配ベクトル：the gradient vector．全微分 $(df)_P$ は行ベクトルだったが，それを “縦に並べかえた” だけ．



# 問　　題　　5

**5-1**　関数 $f(x,y) = e^x(\cos y + \sin y)$ に対して $f(0.1, 0.2)$ の近似値を式 (5.5) を用いて求めなさい．また，計算機などで求めた値とどれくらい近いか調べなさい．

**5-2**　2 変数関数 $f$ が “標高を表すスカラ場” （例 1.6），曲線 $\gamma(t)$ が，時刻 $t$ とともに移動する人の運動と思うとき，式 (5.6) で表される 1 変数関数はどのようなものか，説明しなさい．

**5-3**　命題 5.8 を確かめなさい．

**5-4**　平面上の点 $(x,y)$ における標高が，多項式 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ で表されているような世界があるとする．この世界を，原点を中心とする半径 1 の円に沿って，反時計回りに速さ 1 で歩くとき，この旅はどのようなものになるか．すなわち，上り坂，下り坂になる経路上の部分を指摘しなさい．ヒント：考えている旅は例 5.5 の (2) である．

**5-5**　点 $P = (a,b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 $f$ の $P$ における全微分 $(df)_P$ は $(0,0)$ でないとする．このとき，$f$ の点 $P$ における単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分 $(df)_P(\boldsymbol{v})$ が最大になるのは $\boldsymbol{v}$ が $(\operatorname{grad}_f)_P$ と同じ向きに平行なときである．このことを示しなさい．ヒント：$\boldsymbol{v}$ は単位ベクトルであることに注意．

**5-6**　点 $P = (a,b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 $f$ の $P$ における全微分 $(df)_P$ は $(0,0)$ でないとする．点 $P$ を通る $f$ の等高線を $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ $(\gamma(0) = P)$ とパラメータ表示するとき，$t = 0$ における $\gamma$ の速度ベクトル $\dot\gamma(0)$ は $(\operatorname{grad} f)_P$ に直交することを示しなさい．すなわち，“等高線は勾配ベクトルに直交する”．

**5-7**　関数 $f$ を次のように定義する：

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (y = x^2 \quad \text{かつ} \quad x \neq 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}.$$

すると，$\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ に対して，$f$ の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 になることを示しなさい．$f$ は原点で連続か．