6. 合成関数の微分公式

■ **合成関数の微分 (チェイン・ルール)**

命題 6.1 (合成関数の微分公式 (命題 5.6 再録)). 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ と，像が D に含まれる微分可能な曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ に対して，1 変数関数 $F(t) = f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ は微分可能で，

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ．

偏微分の意味を考えれば，命題 6.1 から直ちに次のことがわかる：

系 6.2 (チェイン・ルール [1])**.** 2 変数関数 $f(x,y)$ と，2 つの 2 変数関数の組

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta)$$

がともに微分可能であるとき [2]，2 変数関数

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = f\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)$$

は微分可能で，次が成り立つ：

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, \eta)$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, \eta).$$

注意 6.3. 物理学や工学では，系 6.2 の $\tilde{f}(\xi, \eta)$ のことを $f(x,y)$ と同じ f を用いて $f(\xi, \eta)$ のように表すことがある．文脈で独立変数がはっきりわかるのならこの記法が便利である．このとき (適当に省略して) 系 6.2 の結論を

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

と表すことができる．あるいは，従属変数に名前をつけて

$$z = f(x,y) = f\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr) = \tilde{f}(\xi, \eta)$$

[*] 2014 年 5 月 21 日 (2014 年 5 月 28 日訂正)
[1] チェイン・ルール：the chain rule.
[2] ξ: xi; η: eta. ギリシア文字 ξ, η, ζ (zeta) はしばしばローマ文字 (x, y, z) の対応物として使われる．

と書いたとき，チェイン・ルールを

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

と書くこともできる．さらに行列の積を用いて

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

とも書く．

■ **$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像とその微分** 領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上で定義された写像 $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ を考える．ただし n も正の整数である．この写像は D の各点 $(x_1, \dots, x_m)$ に対して $\mathbb{R}^n$ の要素 $F(x_1, \dots, x_m)$ を対応させる対応の規則である．$F(x_1, \dots, x_m)$ とおくとこれは $\mathbb{R}^n$ の要素であるから，n 個の実数の組であり，それを $(y_1, \dots, y_n)$ と書けば各成分 y_j は $(x_1, \dots, x_m)$ によって定まる一つの実数である．すなわち y_j は $(x_1, \dots, x_m)$ の関数となっているから，写像 $F\colon \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$ とは領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上で定義された n 個の関数の組とみなすことができる：

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^m \supset D \ni (x_1, \dots, x_m) \\ \longmapsto \bigl(F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m)\bigr) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{6.2}$$

ただし $F_j\colon D \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ は D 上で定義された m 変数関数であり，F の**成分**とよぶ [3]．式が長くなるのを避けるために，ベクトル記法を用いて

$$\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x}) \qquad \bigl(\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m),\ \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)\bigr)$$

などと書くことがある．写像 F の成分が F_j $(j = 1, \dots, n)$ であることを $F = (F_1, \dots, F_n)$ と書くことにしよう．

写像 $F = (F_1, \dots, F_n)\colon \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^n$ が **C^k-級** であるとは [4]，各 j $(j = 1, \dots, n)$ に対して関数 $F_j\colon D \to \mathbb{R}$ が C^k-級 (23 ページ; 2 変数関数に対する定義だが，変数が多い場合も同様) となることである．

[3] 写像：a map；成分: components.
[4] 本来なら微分可能性から定義していくべきだが，簡単のため C^k-級の概念だけを定義しておく．こういうもののみを考えていても実用上はほとんど問題がない．

定義 6.4. 領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上で定義された C^1-級の写像 $F = (F_1, \dots, F_n)\colon D \to \mathbb{R}^n$ に対して

$$dF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \qquad (n \times m \text{ 行列})$$

を F の**微分**または**ヤコビ行列** という [5)]．ただし $(x_1, \dots, x_m)$ は $D \subset \mathbb{R}^m$ の座標である．

■ 合成写像とその微分 領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ と $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された写像 $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ と $G\colon U \to \mathbb{R}^k$ が与えられ，かつ任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in D$ に対して $F(\boldsymbol{x}) \in U$ が成り立つとき，

$$G \circ F\colon \mathbb{R}^m \supset D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto G\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr) \in \mathbb{R}^k$$

で与えられる写像 $G \circ F\colon \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^k$ を F と G の**合成写像** [6)] という．

命題 6.5. 上の状況で，F, G がともに C^1-級ならば

$$d(G \circ F) = dG\, dF, \qquad \text{すなわち} \qquad d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr)\, dF(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ただし右辺の積は行列の積を表す．

■ 逆写像 領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ の各点 $\boldsymbol{x}$ に対してそれ自身を対応させる写像

$$\mathrm{id}_D\colon D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \mathrm{id}_D(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \in D$$

を D 上の**恒等写像** [7)] という．領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ から $U \subset \mathbb{R}^n$ への写像 $F\colon D \to U$ に対して，写像 $G\colon U \to D$ で

$$G \circ F = \mathrm{id}_D, \qquad F \circ G = \mathrm{id}_U$$

5) 微分：the differential；ヤコビ行列：the Jacobian matrix；ヤコビ：Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851, D).
6) 合成：the composition.
7) 恒等写像：the identity map；定義域 D が文脈より自明な場合は，id_D を単に id と書く場合がある．

をみたすものが存在するとき，G を F の**逆写像** [8)] といい，$G = F^{-1}$ と書く．

例 6.6. 領域

$$D = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$$

に対して

$$\begin{aligned} &F\colon D \ni (r, \theta) \longmapsto F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in U, \\ &G\colon U \ni (x, y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \in D \end{aligned}$$

とすると $G = F^{-1}$, $F = G^{-1}$ である．実際, $(r, \theta) \in D$ に対して $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}\tan\theta = \theta$（定義 4.2 参照）だから，$r > 0$ に注意すれば

$$\begin{aligned} G \circ F(r, \theta) &= G(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}, \tan^{-1}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) \\ &= (r, \tan^{-1}\tan\theta) = (r, \theta) = \mathrm{id}_D(r, \theta). \end{aligned}$$

一方，$\theta = \tan^{-1}(y/x)$ とすると，逆正接関数の定義から $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\cos\theta > 0$．したがって，$x > 0$ に注意して

$$\begin{aligned} \cos\tan^{-1}\frac{y}{x} &= \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\tan^{-1}\frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \\ &= \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\tan^{-1}\frac{y}{x} &= \sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

これらから

$$\begin{aligned} F \circ G(x, y) &= F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \\ &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\cos\tan^{-1}\frac{y}{x}, \sqrt{x^2 + y^2}\sin\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = (x, y) = \mathrm{id}_U(x, y). \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

注意 6.7. 座標平面上の点 (x, y) に対して例 6.6 のように $(r, \theta) = G(x, y)$ と定めるとき，(r, θ) を座標平面の**極座標**という．これに対して，(x, y) を**直交**

8) 逆写像：the inverse map; F^{-1}: the inverse of F/F-inverse; ここで定義域の $\mathbb{R}^m$, 値域の $\mathbb{R}^n$ は一般に $m = n$ とは限らないが，微分可能な写像が微分可能な逆写像をもつ場合は $m = n$ が成り立つ（命題 6.8 参照）.

座標系 あるいは **デカルト座標系**という [9].

例 6.6 の表示では，(x, y) 平面の右半分しか極座標で表示できないが，通常は次のように平面のほぼ全体を表せるように拡張する：領域

$$\widetilde{D} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r > 0, -\pi < \theta < \pi\right\},$$
$$\widetilde{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0 \text{ または } x > 0\}$$

を考え，$h\colon \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ を

$$h(x,y) := \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & (x > 0) \\ -\tan^{-1}\dfrac{x}{y} + \dfrac{\pi}{2} & (x \leqq 0, y > 0) \\ -\tan^{-1}\dfrac{x}{y} - \dfrac{\pi}{2} & (x \leqq 0, y < 0) \end{cases}$$

と定め [10],

$$\widetilde{F}\colon \widetilde{D} \ni (r,\theta) \longmapsto \widetilde{F}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \widetilde{U},$$
$$\widetilde{G}\colon \widetilde{U} \ni (x,y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, h(x,y)\right) \in \widetilde{D}$$

とおけば $\widetilde{F} = \widetilde{G}^{-1}$, $\widetilde{G} = \widetilde{F}^{-1}$ となる．座標平面上の点 (x, y) に対応する $(r, \theta) = \widetilde{G}(x, y)$ を (x, y) の極座標という.

命題 6.8. 写像 $F\colon \mathbb{R}^m \supset D \to U \subset \mathbb{R}^n$ が逆写像 $G = F^{-1}$ をもち，F，F^{-1} ともに C^1-級ならば，$m = n$ で，

$$dF^{-1} = (dF)^{-1} \qquad \text{すなわち} \qquad d(F^{-1})\big(F(\boldsymbol{x})\big) = \big(dF(\boldsymbol{x})\big)^{-1}$$

が成り立つ．ただし右辺の “-1” は m 次正方行列の逆行列を表す.

証明． 恒等写像の微分が単位行列 E となることに注意して，$F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_D$ に命題 6.5 を適用すれば $dF^{-1}dF = E$, また $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_U$ に命題 6.5 を適用すれば $dFdF^{-1} = E$. したがって dF^{-1} は dF の逆行列である．逆行列が存在するのは正方行列に限るので，$m = n$ が成り立つ. □

[9] 極座標：the polar coordinate system; 直交座標系：the orthognonal cooridnate system; デカルト座標系：the Cartesian coordinate system; デカルト：: Descartes, René (Renatus Cartesius; 1596–1650).

[10] $h(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ と点 (x, y) を結ぶ平面上の有向線分が x 軸の正の部分と成す角を表している．この関数は，たとえば C や Fortran などでは `atan2(x,y)` という関数として実装されている.

■ 変数変換

例 6.9 (平面極座標とラプラシアン)．例 6.6 の状況を考える：

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \qquad y = y(r,\theta) = r\sin\theta. \tag{6.3}$$

このとき $F\colon (r, \theta) \mapsto (x, y)$ の微分（定義 6.4）は

$$dF = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

である．一方，逆写像 $G = F^{-1}\colon (x, y) \mapsto (r, \theta)$ の微分は

$$dG = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

となる [11].

平面上の C^2-級関数 $f(x, y)$ に対して

$$\Delta z = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{6.6}$$

を対応させる Δ を**ラプラス作用素**または**ラプラシアン**という [12]．いま，$f(x, y)$ を (6.3) によって (r, θ) の関数とみなしたとき，Δf を f の r, θ に関する偏導関数を用いて表そう.

式 (6.5) とチェイン・ルール (系 6.2) を用いれば，偏微分の順序交換（定理 3.13）に注意して

$$\frac{\partial f}{\partial x} = r_x\frac{\partial f}{\partial r} + \theta_x\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f_r - \frac{y}{x^2+y^2}f_\theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f_r - \frac{y}{x^2+y^2}f_\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)f_r + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f_r}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)f_\theta - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial f_\theta}{\partial x} \\
&= \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_r + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f_{rr} - \frac{y}{x^2+y^2}f_{r\theta}\right) \\
&\qquad + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}f_\theta - \frac{y}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f_{\theta r} - \frac{y}{x^2+y^2}f_{\theta\theta}\right)
\end{aligned}$$

[11] 式 (6.4), (6.5) が命題 6.8 をみたしていることを確かめなさい.

[12] ラプラス作用素：the Laplace operator; ラプラシアン：the Laplacian; ラプラス：Laplace, Pierre-Simon (1749–1827, F)．ラプラシアンは “何に使うもの” というよりは，物理学や工学の至るところに現れる作用素である.

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2}f_{rr} - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_{r\theta} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}f_{\theta\theta} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_r + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}f_\theta.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}f_{rr} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_{r\theta} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}f_{\theta\theta} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}f_r - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}f_\theta.$$

したがって $r=\sqrt{x^2+y^2}$ に注意すれば

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta} \tag{6.7}$$

となる. ♢

例 6.10. 例 6.9 を少し異なった方法で計算しよう：上の記号をそのまま用いると，命題 6.8 をもちいれば

$$dG = d(F^{-1}) = (dF)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

である．したがって

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

これを用いれば

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2\theta f_{rr} - \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta f_r + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2\theta f_{rr} + \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta f_r - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta$$

なので，例 6.9 と同じ結果を得る. ♢

問　題　6

6-1 平面のスカラ場 $f(x,y)$ が $\Delta f = f_{xx}+f_{yy}=0$ をみたしているとき，f を**調和関数**という（第 2 回の問題 2-4）.

(1) 1 変数関数 $F(t)$ を用いて $f(x,y)=F(\sqrt{x^2+y^2})$ の形に表される調和関数をすべて求めなさい.

(2) $f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ は調和関数であることを確かめなさい.

6-2 定数 $c\ (\neq 0)$ に対して

$$\xi = x+ct, \qquad \eta = x-ct$$

により変数変換 $(t,x)\mapsto(\xi,\eta)$ を定める．このとき，C^2-級関数 $f(t,x)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4c^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}$$

となることを確かめなさい.

さらに，$f_{tt}-c^2f_{xx}=0$ を満たす C^2-級関数 f は，2 つの C^2-級の 1 変数関数 F, G を用いて

$$f(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

という形に書けることを示しなさい.

方程式 $f_{tt}=c^2f_{xx}$ を**波動方程式**という．ここに述べたことを，“波動方程式のダランベールの解法 [13]” という（第 2 回の問題 2-3）.

6-3 空間のスカラ場 $f(x,y,z)$ に対して $\Delta f = f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ を対応させる Δ を空間の**ラプラス作用素**という（第 2 回の問題 2-5）．空間の変数変換

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi$$
$$\left(r>0, -\pi<\theta<\pi, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

に対して

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi} & \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} & 0 \\ -\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

であることを確かめ，

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r}f_r + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r^2}\tan\varphi f_\varphi$$

となることを確かめなさい.

[13] ダランベール：d'Alembert, Jean Le Rond (1717–1783, F).