7. 陰関数の微分法

■ **陰関数**　領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数 $F(x,y)$ に対して，式

$$F(x,y)=0 \tag{7.1}$$

は x と y の関係式である．これを “y について解く” ことができたとしよう：

$$F(x,y)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y=\varphi(x).$$

このとき，関係式 (7.1) は関数 $y=\varphi(x)$ を暗に表しているので，$y=\varphi(x)$ の**陰関数**[1] 表示という．

例 7.1.　(1)　$F(x,y)=2x-3y+5$ とすると，式 $F(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ ($\varphi(x)=\frac{1}{3}(2x+5)$) と書き換えられるので，この式は y は x の関数であることを表している．また，この関係式は $x=\psi(y)=\frac{1}{2}(3y-5)$ とも書けるので，x が y の関数であることも表している．

(2)　$F(x,y)=x^2+y^2-1$ とおくと，関係式 $F(x,y)=0$ は y について解けない．実際，この関係式は $y^2=1-x^2$ と同値だから，与えられた x に対応する y は一般に一つには決まらない．

しかし，F の定義域を $U:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ に限ると

$$(x,y)\in U \text{ かつ } F(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\sqrt{1-x^2} \quad (-1<x<1)$$

となり y は x の関数とみなせる．また，定義域を $U':=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<0\}$ に限れば，関係式は関数 $y=-\sqrt{1-x^2}$ を与える．この場合，x は y の関数とはならないが，例えば F の定義域を $\{(x,y)|x>0\}$ に限れば，$F(x,y)=0$ は $x=\sqrt{1-y^2}$ と書ける．　◇

同様に 3 変数以上の関数 $F(x_1,\dots,x_m)$ に対して $F(x_1,\dots,x_m)=0$ が x_m について解け，$x_m=\varphi(x_1,\dots,x_{m-1})$ とかけるとき，$F(x_1,\dots,x_m)=0$ を φ の陰関数表示という．

[*] 2014 年 5 月 28 日
[1] 陰関数：an implicit function.

■ **陰関数定理**　一般に $f(x,y)=0$ が y についてとけるか否かを判定するのは難しいが，次の十分条件が知られている：

定理 7.2 (陰関数定理の特別な場合)**.** 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された C^r-級関数 $F\colon D\to\mathbb{R}$ と点 $P=(x_0,y_0)\in D$ で $F(x_0,y_0)=0$ をみたしているものをとる．ただし $r=1,2,\dots,\infty$ とする．

もし，点 P において $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ が成り立っているならば，

- 点 P を含む領域 $U\subset D$,
- ある $\mathbb{R}$ の開区間 I と C^r-級の 1 変数関数 $\varphi\colon I\to\mathbb{R}$

で次をみたすものが存在する：

点 $(x,y)\in U$ が $F(x,y)=0$ をみたすならば $x\in I$ かつ $y=\varphi(x)$ が成り立つ．

とくに各 $x\in I$ に対して次が成立する：

$$F\bigl(x,\varphi(x)\bigr)=0. \tag{7.2}$$

この定理の結論は，P の十分近くで，$F(x,y)=0$ が y について解けることを表している．また，定理 7.2 で変数 x と y の役割を取り替えれば，第 1 段落の仮定のもと，$F_x(P)\neq 0$ ならば P の近くで $F(x,y)=0$ は $x=\psi(y)$ と，x について解けることもわかる．

変数の個数が多いときも，定理 7.2 に対応する次が成り立つ：

定理 7.3. 正の整数 m に対して，領域 $D\subset\mathbb{R}^m$ で定義された C^r-級関数 $F\colon D\to\mathbb{R}$ と点 $P=(a_1,\dots,a_m)\in D$ で $F(a_1,\dots,a_m)=0$ をみたしているものをとる．ただし $r=1,2,\dots,\infty$ とする．

もし，点 P において $F_{x_m}(a_1,\dots,a_m)\neq 0$ が成り立っているならば，点 P を含む領域 $U\subset D$，$\mathbb{R}^{m-1}$ の領域 V，および C^r-級の $(m-1)$-変数関数 $\varphi\colon V\to\mathbb{R}$ で次をみたすものが存在する：

点 $(x_1,\dots,x_m)\in U$ が $F(x_1,\dots,x_m)=0$ をみたすならば $(x_1,\dots,x_{m-1})\in V$ かつ $y=\varphi(x_1,\dots,x_{m-1})$ が成り立つ．

とくに各 $(x_1,\dots,x_{m-1})\in V$ に対して次が成り立つ：

$$F\bigl(x_1,\dots,x_{m-1},\varphi(x_1,\dots,x_{m-1})\bigr)=0. \tag{7.3}$$

例 7.4. $\mathbb{R}^3$ で定義された 3 変数関数 $F(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$ は C^∞-級である．点 $P=(0,0,1)$ は $F(P)=0$ をみたしているが，さらにまた $F_z(P)=2\neq 0$ が成り立つ．このとき，$U := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z>0\}$, $V := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ とすると，

$$F(x,y,z)=0 \quad \text{かつ} \quad (x,y,z)\in U \iff z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{かつ} \quad (x,y)\in V$$

となる．すなわち $F(x,y,z)=0$ は z について解ける．集合 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z)=0\}$ は $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 1 の球面だが，関係式を z について解いて，“北半球” のグラフ表示が得られたことになる [2]． ◇

■ **なめらかな曲線** 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数 F に対して，集合 $C=\{(x,y)\in D \mid F(x,y)=0\}$ を考える．集合 C の点（要素）P に対して，P を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 U をうまくとれば C と U の共通部分 $C\cap U$ が C^∞-級関数のグラフと合同となるとき，C は P の近くで**なめらかな曲線** [3] であるということにする．とくに，各点の近くでなめらかな曲線であるとき C を単に**なめらかな曲線**であるという．

例 7.5. (1) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ は原点を中心とする半径 1 の円 [4] となるが，これはなめらかな曲線である．実際，点 $P\in C$ は

$$U_1 := \{(x,y) \mid y>0\}, \qquad U_2 := \{(x,y) \mid y<0\},$$
$$U_3 := \{(x,y) \mid x>0\}, \qquad U_4 := \{(x,y) \mid x<0\}$$

のいずれかの要素となるが，各 $j=1,2,3,4$ に対して $C\cap U_j$ は C^∞-級関数 $\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$ のグラフと合同である．

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ のグラフは，なめらかな曲線である．実際，この図形は $g(x)=x^3$ のグラフを直線 $y=x$ に関して折り返したものになっているが，$g(x)=x^3$ は C^∞-級である．なお f は 0 で微分可能でない． ◇

[2] 球面：a sphere; これは球の表面を表す．中身の詰まった球は，単に球 a ball，あるいは球体という．北半球：the Northern Hemisphere.
[3] なめらかな曲線：a smooth curve.
[4] 円：a circle; 原点を中心とする半径 1 の円：the circle centered at the origin with radius 1.

定理 7.2 から次がすぐにわかる：

命題 7.6. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数 F に対して

$$C := \{(x,y)\in D \mid F(x,y)=0\}$$

とおく．各 $P\in C$ で $(dF)_P\neq(0,0)$ ならば C はなめらかな曲線を与える [5]．

注意 7.7. 命題 7.6 の逆は成立しない．実際 $G(x,y)=(x^2+y^2-1)^2$ とすると $C'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid G(x,y)=0\}$ は例 7.5 の (1) の C と一致し，なめらかな曲線を与えるが，C' の各点 P で $(dF)_P=(0,0)$ である．

例 7.8. (1) いずれもが 0 でない定数 a, b に対して $\mathbb{R}^2$ で定義された関数

$$F(x,y) := ax^2+by^2-1$$

を考えると $dF_{(x,y)}=(2ax,2by)$ であるから，$dF_{(x,y)}=(0,0)$ となるのは $(x,y)=(0,0)$ のときのみ．ここで $F(0,0)=-1\neq 0$ だから

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$$

上で $dF\neq(0,0)$．したがって C はなめらかな曲線である．実際，C は楕円（$a>0$, $b>0$ のとき）または双曲線（$ab<0$ のとき）となる．

(2) 関数

$$F(x,y) := 2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2$$

に対して

$$dF_{(x,y)}=\bigl(4x(1-x^2-y^2), -4y(1+x^2+y^2)\bigr)$$

だから $dF_{(x,y)}=(0,0)$ となるのは

$$(x,y)=(0,0), \quad (1,0), \quad (-1,0)$$

のときのみである．とくに $F(\pm1,0)\neq 0$，$F(0,0)=0$ なので，

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$$

とすると $(0,0)$ の近くをのぞいて C はなめらかな曲線である．この

[5] 関数 F の全微分 dF の定義は 5 回（33 ページ）参照.

曲線は**レムニスケート**[6] とよばれる（問題 7-4 の $a=0$ の場合）．◇

■ 陰関数の微分法

命題 7.9. 定理 7.2 の状況で $F(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ の陰関数表示となっているとき，次が成り立つ：

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)} \qquad \bigl(y=\varphi(x)\bigr).$$

証明. 恒等式 $F(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分すると，チェイン・ルール（命題 5.6 または命題 6.1）により

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}F\bigl(x,\varphi(x)\bigr) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\frac{d\varphi(x)}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{d\varphi(x)}{dx}. \end{aligned}$$

定理 7.2 の仮定から，考えている点の近くで $F_y \neq 0$ だから結論を得る． □

命題 7.9 の結論の式を次のように書くこともある：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

同様に，$F(x,y)=0$ が $x=\psi(y)$ の陰関数表示で，$F_x\neq 0$ であるとき，

$$\frac{d\psi}{dy}(y) = -\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)} \quad \bigl(x=\psi(y)\bigr) \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x}.$$

例 7.10. 例 7.8 の (1) の曲線 C の，点 $P=(x_0,y_0)\in C$ における接線の方程式を求めよう．いま $y_0\neq 0$ とすると $F_y(x_0,y_0)=2by_0\neq 0$ なので定理 7.2 から P の近くで C は関数のグラフ $y=\varphi(x)$ となる．とくに $y_0=\varphi(x_0)$ に注意して，命題 7.9 から

$$\frac{d\varphi}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} = -\frac{2ax_0}{2by_0} = -\frac{a}{b}\frac{x_0}{y_0}.$$

[6] 楕円：an ellipse; 双曲線：a hyperbola; 放物線：a parabola; 2 次曲線（円錐曲線）：conics; レムニスケート：the lemniscate.

したがって接線の方程式は

$$y = -\frac{a}{b}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0 \qquad \text{すなわち} \qquad ax_0x+by_0y = ax_0^2+by_0^2.$$

一方 $y_0=0$ のときは $F_x(x_0,y_0)\neq 0$ なので，x と y の役割を変えて考えれば上と同じ式で接線が表されることがわかる． ◇

さらに変数の多い場合，すなわち定理 7.3 の状況でも

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_{m-1}) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_m)}{\dfrac{\partial F}{\partial x_m}(x_1,\dots,x_m)} \quad \bigl(x_m=\varphi(x_1,\dots,x_{m-1})\bigr)$$

が各 $j=1,\dots,m-1$ に対して成立する．

一般の陰関数定理

この陰関数定理 7.3 は “m 個の変数が一つの関係式をみたしているならば（適当な条件のもと）そのうち一つの変数について解くことができる” ということを表している．このことを一般に述べたのが次の陰関数定理である：

定理 (陰関数定理)．領域 $D\subset\mathbb{R}^m$ 上で定義された k 個の C^r-級関数 F_1, …, F_k $(k<m)$ が与えられているとする．点 $P=(a_1,\dots,a_m)$ が

$$F_j(a_1,\dots,a_m)=0 \qquad (j=1,\dots,k)$$

を満たし，かつ

$$(*) \qquad \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_k}(P) \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つならば，P を含む D の領域 U，点 $(a_{k+1},\dots,a_m)$ を含む $\mathbb{R}^{m-k}$ の領域 V および V 上で定義された k 個の C^r-級関数 φ_1, …, φ_k で，次を満たすものが存在する：

点 $(x_1,\dots,x_m)\in U$ が

$$F_1(x_1,\dots,x_m)=\cdots=F_k(x_1,\dots,x_m)=0$$

をみたしているならば，$(x_{k+1},\dots,x_m)\in V$ で次が成り立つ：

$$x_1=\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_m), \quad \dots, \quad x_k=\varphi_k(x_{k+1},\dots,x_m).$$

とくに

$$F_j\bigl(\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_m),\dots,\varphi_k(x_{k+1},\dots,x_m),x_{k+1},\dots,x_m\bigr)=0 \qquad (j=1,\dots,k)$$

が成立する．

すなわち“m 個の変数が k 個の関係式を満たしているならば，適当な条件のもと k 個の変数はのこりの $(m-k)$ 個の変数の関数となる”．

ここでは“x_1, ..., x_k について解ける”という形で定理の主張を述べたが，実際には変数の順番を変えたバージョンを用いることがある．命題 7.6 のように，どの変数かを特定しないなら条件 $(*)$ は

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}(P)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_m}(P)\end{pmatrix}=k$$

と書くことができる．ただし rank は行列の階数を表す．命題 7.6 に対応する結論は,

$$\{(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m \mid F_j(x_1,\dots,x_m)=0, j=1,\dots,k\}$$

は点 P の近くで $\mathbb{R}^m$ の C^r**-級部分多様体になる** [7] と述べられるが，多様体を真面目に定義するのは大変なので，この講義ではそれ以上言及しない．

陰関数定理は，次の逆写像定理から示すことができる：

定理 (逆写像定理)**.** 領域 $D\in\mathbb{R}^m$ 上で定義された C^r-級写像

$$f=(f_1,\dots,f_m)\colon \mathbb{R}^m\supset D\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

が，点 $P\in D$ において

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(P)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(P)\end{pmatrix}\neq 0$$

をみたしているならば，P を含む領域 $U\in D$ と $f(P)$ を含む $\mathbb{R}^m$ の領域 V，および V で定義された C^r-級写像 $g\colon V\to\mathbb{R}^m$ で $f\circ g(y)=y$ $(x\in V)$, $g\circ f(x)=x$ $(x\in U)$ を満たすもの，すなわち f の逆写像が存在する．

証明はここでは紹介しない．逆写像定理を用いて陰関数定理を示すには，与えれた写像 $F=(F_1,\dots,F_k)\colon\mathbb{R}^m\supset D\to\mathbb{R}^k$ に対して

$$f=(F_1,\dots,F_k,x_{k+1},\dots,x_m)\colon\mathbb{R}^m\supset D\to\mathbb{R}^m$$

に対して逆写像定理を適用すればよい（詳細はここでは扱わない）．

[7] 部分多様体：a submanifold.

問　題　7

7-1 定理 7.2 から命題 7.6 を導きなさい．

7-2 $F(x,y)=x^2-y^3$ とするとき $F(x,y)=0$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合はなめらかな曲線であるかを調べ，この図形の形を描きなさい．

7-3 定理 7.2 の状況，すなわち $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$ の点 $P=(x_0,y_0)$ において $F_y\neq 0$ であり，P の近くで C がグラフ $y=\varphi(x)$ と表されているとする．このとき

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi''(x)=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

が成り立つことを示しなさい．ただし，右辺の F_{xx} などは $(x,\varphi(x))$ における値を表す．

7-4 定数 a に対して

$$F(x,y)=2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2-a,\quad C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$$

とおく．このとき C がグラフ $y=\varphi(x)$ と書けるような範囲を調べ，そこでの φ の増減，変曲点を調べ C の形を描きなさい（ヒント：a の値によって場合分けが起きる）．

7-5 $\mathbb{R}^3$ の領域 D 上で定義された C^∞ 級の 3 変数関数 $F(x,y,z)$ を考える．とくに $P=(a,b,c)$ において $F(P)=F(a,b,c)=0$ が成り立ち，さらに，P において F_x, F_y, F_z のいずれもが 0 でないとする．このとき定理 7.3 から $F(x,y,z)=0$ は x, y, z について解くことができる．すなわち P を含む $\mathbb{R}^3$ の領域 U，それぞれ (b,c), (c,a), (a,b) を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 V_1, V_2, V_3，さらに C^∞-級の関数 $\xi\colon V_1\to\mathbb{R}$, $\eta\colon V_2\to\mathbb{R}$, $\zeta\colon V_3\to\mathbb{R}$ で次をみたすものが存在する：

$$F(x,y,z)=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x=\xi(y,z),\quad y=\eta(z,x),\quad z=\zeta(x,y).$$

このとき

(1) 次を確かめなさい：

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}(y,z)=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_x(x,y,z)}\qquad \bigl(x=\xi(y,z)\bigr).$$

(2) 点 P の近くで $F(x,y,z)=0$ が成り立っているとき,

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}(y,z)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial z}(z,x)\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}(y,z)=-1 \quad すなわち \quad \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

であることを示しなさい．