# 8. 微分方程式

今回は，微分や偏微分が応用の場面で現れる“微分方程式”を紹介する．現象がどのような微分方程式で表されるか，という問題は数学ではなく，現象を扱う諸科学の問題であり，この授業の守備範囲外である．また，微分方程式の一般論はここでは扱わない．

## 8.1　常微分方程式

1 変数関数 $u(t)$ とその導関数，2 次導関数 ... の間の関係式を**常微分方程式**[1] といい，その関係式をみたす関数 $u(t)$ を微分方程式の**解**という．

**例 8.1.** 放射性物質 $A$ が崩壊していく状況を考える．時刻 $t$ における物質 $A$ の質量を $u(t)$ とおくと，$u(t)$ は常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u \qquad (\lambda \text{ は正の定数}) \tag{8.1}$$

をみたす．任意の定数 $k$ に対して

$$u(t) = ke^{-\lambda t} \tag{8.2}$$

はこの方程式の解である．逆に，(8.1) の解は (8.2) の形をしている．実際[2]，関数 $u(t)$ が (8.1) をみたしているならば

$$\frac{d}{dt}\bigl(e^{\lambda t}u(t)\bigr) = \lambda e^{\lambda t}u(t) + e^{\lambda t}\frac{du}{dt}(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{du}{dt}(t) + \lambda u(t)\right) = 0$$

なので $e^{\lambda t}u(t)$ は定数である．

さらに時刻 $t = t_0$ で物質 $A$ が $k_0\,\mathrm{kg}$ あったとすると，$u(t)$ は

$$u(t_0) = k_0 \tag{8.3}$$

をみたさなければならない．常微分方程式 (8.1) の，条件 (8.3) をみたす解は $u(t) = k_0\exp\{-\lambda(t - t_0)\}$ である[3]．　◇

[*] 2014 年 6 月 4 日
[1] 常微分方程式：an ordinary differential equation.
[2] このことは，一般論として「常微分方程式の解の一意性」から導くことができるが，ここでは特定の方程式について証明を与えるに留める．後期にもう少し詳しく扱う．
[3] $e^X$ のことを $\exp(X)$ とも書く．“exp” は指数関数 the exponential function から来ている．



(8.3) のような特定の独立変数の値における未知関数の値を指定する条件のことを，常微分方程式の**初期条件**といい，初期条件をみたす常微分方程式の解を求める問題を**常微分方程式の初期値問題**[4] という．

**例 8.2.** 正の定数 $a$, $\lambda$ に対して，方程式

$$\frac{du}{dt} = \lambda u(a-u) \tag{8.4}$$

を**ロジスティック方程式**[5] という．生物の個体の増加やある種の経済成長など現象がこの方程式に従うことが知られている．方程式 (8.4) の，初期条件

$$u(0) = u_0, \qquad 0 < u_0 < a \tag{8.5}$$

をみたす解を求めてみよう．関数 $u(t)$ が (8.4), (8.5) をみたしているならば，$t = 0$ を含むある区間 $I$ では $u$, $a-u$ はともに正の数となる．そこで (8.4) を

$$\lambda = \frac{1}{u(a-u)}\frac{du}{dt}$$

と書き換える．両辺を $t = 0$ から $t = T$（$T \in I$）まで積分し，$U = u(T)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\lambda T &= \int_0^T \frac{1}{u(a-u)}\frac{du}{dt}\,dt = \int_{u_0}^U \frac{du}{u(a-u)} = \frac{1}{a}\left[\log\left(\frac{u}{a-u}\right)\right]_{u_0}^U \\ &= \frac{1}{a}\log\left\{\left(\frac{U}{a-U}\right)\left(\frac{a-u_0}{u_0}\right)\right\} = \frac{1}{a}\log\left\{\left(\frac{u(T)}{a-u(T)}\right)\left(\frac{a-u_0}{u_0}\right)\right\}\end{aligned}$$

となる．ここでは置換積分法の公式を用い，区間 $I$ で $u$, $a-u$ がともに正となることに注意した．この等式で $T$ を $t$ と書き換えて $u(t)$ について解けば (8.4) の (8.5) をみたす解

$$u(t) = \frac{au_0}{u_0 + (a-u_0)e^{-a\lambda t}} \tag{8.6}$$

が得られる（問題 8-2）．　◇

**例 8.3.** 理想的なばねの先端につけた質量 $m$ の質点が振動している状況を考える．ばねに沿って $x$ 軸をとり，平衡点を原点とし，時刻 $t$ における質点の位置を $x(t)$ とする．質点に働く力はフックの法則に従うばねの復元力 $-kx$ ($k > 0$ は，ばね定数) および速度に比例する空気抵抗 $-\rho\frac{dx}{dt}$ ($\rho > 0$ は定数)

[4] 初期条件：an initial condition; 初期値問題：an initial value problem.
[5] ロジスティック方程式：the logistic equation.

のみとすると，時刻 $t$ におけるばねの位置 $x(t)$ は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\rho\frac{dx}{dt}+kx=0 \tag{8.7}$$

をみたす．

この方程式は $x=x(t)$ の 2 次導関数を含んでいるので **2 階**常微分方程式という．これに対して (8.1) のような方程式を **1 階**常微分方程式という．

ばねの振動は，時刻 $t=t_0$ でのおもりの位置と速度によって定まる．すなわち，この方程式に関する初期値問題とは，

$$x(t_0)=x_0,\qquad \frac{dx}{dt}(t_0)=v_0 \tag{8.8}$$

なる条件をみたす解を求めることである（問題 8-3）． ♢

**例 8.4.** 区間 $\{t\,|\,t>0\}$ で定義された関数 $f(t)$ に関する常微分方程式の初期値問題

$$f''(t)+\frac{p}{t}f'(t)=0,\qquad f(1)=\alpha,\quad f'(1)=\beta \tag{8.9}$$

を考える．ただし $p$, $\alpha$, $\beta$ は定数である．この方程式の解は

$$f(t)=\alpha+\frac{\beta}{1-p}\bigl(t^{1-p}-1\bigr)\qquad (p\neq 1\ \text{のとき})$$

$$f(t)=\alpha+\beta\log t\qquad (p=1\ \text{のとき})$$

となる．これは，方程式が $\bigl\{t^p f'(t)\bigr\}'=0$ と書き換えられることからわかる． ♢

## 8.2 偏微分方程式

多変数関数の偏導関数の関係式を**偏微分方程式**[6]，その関係式を満たす関数を偏微分方程式の**解**という．

**■ ラプラスの方程式・ポアソンの方程式** 2 変数関数 $u=u(x,y)$, 3 変数関数 $w=w(x,y,z)$ をそれぞれ座標平面，座標空間のスカラ場とみなすとき，

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad \Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

[6] 偏微分方程式：a partial differential equation.



によりあたらしい関数をつくる対応 $\Delta$ を**ラプラス作用素**[7] という．

とくに $C^2$-級関数 $u(x,y)$ $(w(x,y,z))$ が偏微分方程式 $\Delta u=0$ $(\Delta w=0)$ (**ラプラス方程式**と呼ばれる) をみたすとき，$u$ $(w)$ は**調和関数**[8] と呼ばれる．

ラプラス方程式はさまざまな場面に現れる．たとえば，真空中の静電場のポテンシャル (電位) は調和関数となることは電磁気学で学ぶ．また，ニュートンの万有引力の法則に従う重力場のポテンシャル (万有引力の位置エネルギー) は調和関数となることを力学で学ぶ．さらに，空間に電荷や質量が分布している場合は，これらのポテンシャルは $\Delta w=\rho$ ($\rho=\rho(x,y,z)$ は点 $(x,y,z)$ における電荷 (質量) 密度) をみたす．このような $\Delta w=\rho$ ($\rho$ は既知関数) の形の方程式を**ポアソン方程式**[9] とよぶ．

**例 8.5.** 平面のスカラ場 $u=u(x,y)$ が 1 変数関数 $F$ を用いて $u(x,y)=F(\sqrt{x^2+y^2})$ の形に表されるとき $u$ は (原点を中心とする) **回転対称**[10] なスカラ場と呼ぶことにする．回転対称な調和関数を求めよう．例 6.10 で見たように，極座標 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ を用いると

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \tag{8.10}$$

となるが，とくに $u$ が回転対称なら $u$ は $r$ だけの関数で $\theta$ によらない: $u=u(r)$．このとき $u$ が調和関数であるためには $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r=0$ となることが必要十分．したがって，例 8.4 から回転対称な平面のスカラ場は

$$u=\alpha+\beta\log\sqrt{x^2+y^2}\qquad (\alpha,\ \beta\ \text{は定数})$$

となる． ♢

**例 8.6.** 空間のスカラ場 $w=w(x,y,z)$ が $w=F(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ と書けているとき，回転対称なスカラ場と呼ぶことにする．空間の調和関数で，回転対称なものは

$$w=\alpha+\frac{\beta}{r}\qquad (\alpha,\ \beta\ \text{は定数})$$

と表される（問題 8-4）． ♢

[7] ラプラス作用素：the Laplacian; ラプラス：Laplace, Pierre-Simon (1749–1827, F).
[8] 調和関数：a harmonic function.
[9] ポアソン方程式：the Poisson equaiton; ポアソン：Poisson, Siméon Denis (1781–1840, F).
[10] 回転対称：rotationally symmetric.

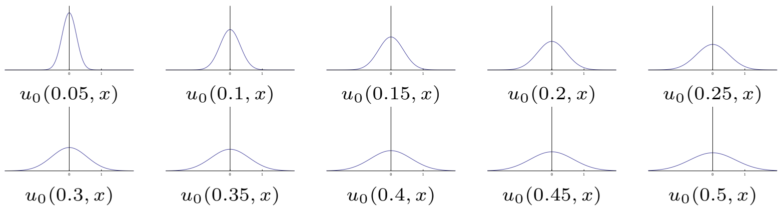


図 8.1　熱方程式の基本解 ($c = 1$)

**■ 針金の熱伝導**　一様な針金に沿って $x$ 軸を配置し，時刻 $t$ における針金の位置 $x$ における針金の温度を $u(t, x)$ とすると，$u$ は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.11}$$

をみたす．この方程式を (1 次元の) **熱方程式**[11] という．ただし $c$ は針金の熱容量と熱伝導率によって定まる正の定数である．

問題 2-2 でみたように

$$u_0(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) \tag{8.12}$$

は $\{(t, x) \,|\, t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ で定義された (8.11) の解である．これを熱方程式 (8.11) の**基本解**とよぶ．高等学校数学 C で学んだ言葉を用いれば，各 $t$ を指定するごとに $u_0(t, x)$ は平均 0 ，分散 $2ct$ (標準偏差 $\sqrt{2ct}$) の正規分布の密度関数である．とくに

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) dx = 1$$

が成り立つ[12]．時刻 $t$ を 0 に近づけると

$$\lim_{t\to+0} u_0(t, x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

と，$t = 0$ では定義されないが，$t > 0$ ではなめらかな関数を与える (図 8.1).

[11] 熱方程式：the heat equation.
[12] この積分の求め方は，第 14 回に紹介する．



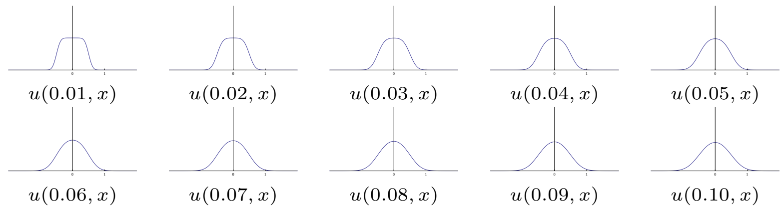


図 8.2　熱方程式の解 (8.13) ($c = 1$)

次に，関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

に対して

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x - y) f(y)\, dy \tag{8.13}$$

とすると $u(t, x)$ も (8.11) の解を与えており，$t \to 0$ とすると “大体” $f$ に近づく[13] (図 8.2).

**■ 高次元の熱方程式**　一様な鉄板，たとえばフライパンなどの位置 $(x, y)$, 時刻 $t$ における温度を $u(t, x, y)$ とすると，$u$ は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\varDelta u \qquad (c \text{ は正の定数}) \tag{8.14}$$

をみたす．ただし，$\varDelta$ は $(x, y)$ に関するラプラス作用素である：

$$\varDelta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

たとえば $u$ が $(x, y)$ について回転対称，すなわち $u = u(t, \sqrt{x^2 + y^2})$ の形になっていると仮定すると，極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて (8.14) は

$$u_t = c\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right)$$

と書き換えることができる．とくに

$$u(t, r) = \frac{1}{4\pi\sqrt{ct}} \exp\left(-\frac{r^2}{4ct}\right) \tag{8.15}$$

はこの方程式の解である．

[13] “大体” の説明は今回はしない．

同様に，空間の温度分布 $u = u(t,x,y,z)$ も

$$u_t = c\Delta u \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

をみたす．

**■ 弦の振動と波動方程式**　一様な弦が振動している状況を考える．弦にそって $x$ 軸をとり，時刻 $t$ における弦の平衡点からのずれを $u(t,x)$ とすると，振幅が小さいときは $u$ は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.16}$$

をみたす．ただし $c$ は弦の張力と線密度から定まる正の定数である．これを**波動方程式**[14] とよぶ．この方程式の任意の解は

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

と書ける．ただし $F$, $G$ は (すきなだけ微分可能な) 1 変数関数である (問題 6-2)[15]．

熱方程式と同じように，平面や空間の波動方程式は $u_{tt} = c^2 \Delta u$ と表される．太鼓の膜の振動や空間の波動は (場合によっては近似的に) この方程式により表される．

## 問　題　8

**8-1**　セシウム 137 ($^{137}$Cs) の半減期は 30.17 年である．この場合，方程式 (8.1) の定数 $\lambda$ の値を求めなさい．（単位はどうするか）

**8-2**　(1)　ロジスティック方程式の解 (8.6) の $u(t)$ のグラフを描きなさい．とくに $t \to +\infty$ のときに $u(t)$ はどうなるか．

(2)　方程式 (8.4) の，初期条件 $u(0) = u_0$ ($u_0 > a$) をみたす解を求めなさい．（ヒント：$t = 0$ を含む区間で $a - u < 0$ となるので，$|a - u| = u - a$ であることに注意.）

[14] 波動方程式：the wave equation.

[15] 応用上必要な解を求めるには，さらに境界条件や初期条件を考慮する必要がある．



**8-3**　微分方程式 (8.7) は $\gamma = \rho/(2m)$, $\omega = \sqrt{k/m}$ とおいて得られる方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

に対して，以下はその，初期条件 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ をみたす解であることを確かめなさい：

$$\gamma^2 - \omega^2 > 0 \text{ のとき：} \quad x(t) = e^{-\gamma t}(x_0 \cosh \mu t + d_0 \sinh \mu t) \quad \left(\mu = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad d_0 = \frac{\gamma x_0 + v_0}{\mu}\right)$$

$$\gamma^2 - \omega^2 < 0 \text{ のとき：} \quad x(t) = e^{-\gamma t}(x_0 \cos \mu t + d_0 \sin \mu t) \quad \left(\mu = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}, \quad d_0 = \frac{\gamma x_0 + v_0}{\mu}\right)$$

$$\gamma^2 - \omega^2 = 0 \text{ のとき：} \quad x(t) = e^{-\gamma t}(x_0 + d_0 t) \quad (d_0 = \gamma x_0 + v_0).$$

**8-4**　例 8.6 を確かめなさい.（ヒント：問題 6-3, 例 8.4 を用いる.）

**8-5**　(8.15) にならって空間の熱方程式の (同じような形の) 回転対称な解を求めなさい．

**8-6**　実数 $\theta$ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ($i$ は虚数単位) と定める (オイラーの公式)．さらに，複素数 $z = x + iy$ ($x$, $y$ は実数) に対して

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

と定めよう．すると, $e^z$ の実部 $\operatorname{Re} e^z$ および虚部 $\operatorname{Im} e^z$ は $(x,y)$ の調和関数であることを確かめなさい．

**8-7**　複素数 $z = x + iy$ に対して $f(z) = z^m$ ($m$ は正の整数) とする．$\operatorname{Re} f(z)$ ($\operatorname{Im} f(z)$) は $(x,y)$ の関数とみなすことができるが，これは $(x,y)$ の調和関数であることを $m = 2,3,4$ に対して確かめなさい．一般の $m$ ではどうか．