9. 1変数関数の積分再論

1 変数関数の積分は高等学校で学んだが，高等学校で通常用いられる定義（原始関数を用いて定積分を定義する）は普通の数学のコースでは用いない．今回は，積分の定義を概観し，連続関数に関しては，それが高等学校で学んだ定義と同等であることを述べる．

■ 区間の分割 閉区間 $[a,b]$ の**分割**とは，有限個の実数の列

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\} \qquad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b)$$

のことである．分割 Δ の**幅**とは

$$|\Delta| := \max\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}$$

で定まる正の数のこととする [1]．

■ 積分可能性 区間 $I = [a,b]$ で定義された 1 変数関数 f と，区間 I の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して

$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_j \Delta x_j, \quad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \underline{f}_j \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1} \tag{9.1}$$

と定める．ただし

$$\bar{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最大値”}),$$
$$\underline{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最小値”})$$

とする [2]．

定義 9.1. 区間 I で定義された関数 f が I で**積分可能** [3] である，とは I の分割 Δ の幅をどんどん小さくしていったとき $\overline{S}_\Delta$, $\underline{S}_\Delta$ の値が同じ値に近づくことである．このとき，その値を

$$\int_I f(x)\,dx \qquad \left(= \int_a^b f(x)\,dx\right)$$

と書き，区間 I における f の**積分**という [4]．

例 9.2. 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

を考える [5]．分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して各区間 $[x_{j-1}, x_j]$ には有理数も無理数も含まれるので

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 1(x_j - x_{j-1}) = x_N - x_0 = 1, \quad \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 0(x_j - x_{j-1}) = 0,$$

したがって f は $[0,1]$ で積分可能でない． ◇

例 9.3. 区間 $[-1,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考える．$[-1,1]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_N\}$ に対して番号 $k = k(\Delta)$ を $0 \in [x_{k-1}, x_k]$ となるようにとると，f の最大値は，区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で 1，それ以外の小区間では 0 になる．また f の最小値は 0 だから，

$$\overline{S}_\Delta(f) = x_k - x_{k-1} \qquad \big(k = k(\Delta)\big), \qquad \underline{S}_\Delta(f) = 0.$$

ここで $0 < x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$ だから，$|\Delta|$ をどんどん小さくしていくと $\overline{S}_\Delta(f)$ は 0 に近づく．したがって，f は $[-1,1]$ で積分可能で積分の値は 0 である． ◇

■ 定積分とその性質 関数 f が区間 $I = [a,b]$ で積分可能であるとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_I f(x)\,dx, \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_I f(x)\,dx \tag{9.2}$$

---

[*] 2014 年 6 月 11 日

[1] 最大値 $\max\{a_1, \dots, a_N\}$ は，数 a_1, ..., a_N のうち最大の値を表す．

[2] 関数 f は区間 $[x_{j-1}, x_j]$ で最大値（最小値）をとるとは限らないので，きちんと定義を述べるためには上限 the superimum（下限 the infinimum）という言葉を使う．これは後期に扱う．本節では，主に連続関数の積分を扱う．高等学校で（証明はせずに）学んだように閉区間で連続な関数はその区間で最大値・最小値をとるから，ここで最大値，最小値と言っても問題は生じない．

[3] 積分可能：integrable; 区間 I における f の積分：the integral of f on the interval I.

[4] ここでの定義では $a < b$ が仮定されている．1 変数関数の積分は，下端と上端の大小が逆転している場合も考えるのが普通なので，それを含め (9.2) で定義する．

[5] この節の最初の脚注にもかかわらず，この関数は連続ではない．

と書き f の**定積分** [6] という.

補題 9.4. 区間 $I=[a,b]$ 上で積分可能な 2 つの関数 f, g が

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

をみたしているならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ.

証明. $\overline{S}_\Delta(f) \leqq \overline{S}_\Delta(g)$, $\underline{S}_\Delta(f) \leqq \underline{S}_\Delta(g)$ から結論が得られる. □

ここでは深入りしないが, 定義から直接, 次の事実を導くことができる:

補題 9.5 (積分の線型性)**.** 関数 f, g が区間 $[a,b]$ で積分可能ならば, $f+g$, αf (α は定数) $[a,b]$ で積分可能で, 次が成り立つ:

$$\int_a^b \bigl(f(x)+g(x)\bigr)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx.$$

また, 区間を分割することで次が成り立つ [7]:

補題 9.6. 数 a, b, c を含む閉区間で積分可能な関数 f に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

が成り立つ.

[6] 定積分: the definite integral.
[7] 数 c が区間 $[a,b]$ の内部にある場合は, $[a,c]$ と $[c,b]$ の分割を合わせて $[a,b]$ の分割とすることで, 等式を示すことができる (深入りはしない). さらに a, b, c の大小関係が $a<c<b$ でない場合でも (9.2) の定義を用いれば, 結論が成り立つことが容易に分かる.

■ **微積分学の基本定理** 区間 $I=[a,b]$ で定義された関数 f が I **で連続**または I **上の連続関数**である [8] とは, I の各点 α に対して

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha) \tag{9.3}$$

となることであった. ここで (9.3) であるための必要十分条件は

$$\alpha \text{ に収束する任意の数列 } \{x_n\} \text{ に対して} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha) \tag{9.4}$$

が成り立つことである. 次は, 高等学校で学んだ連続関数の重要な性質であるが, ここでは証明抜きに認めることにする [9]:

定理 9.7 (最大・最小値の存在)**.** 閉区間 $I=[a,b]$ で定義された連続関数 f は I で最大値・最小値をとる. すなわち任意の $x\in I$ に対して $f(x)\leqq f(\alpha)$, $f(x)\geqq f(\beta)$ をみたす α, $\beta\in I$ が存在する.

以上の言葉のもと次の「連続関数の積分可能性定理」[10] が成り立つ:

定理 9.8. 閉区間 $I=[a,b]$ で定義された**連続関数** f は I で積分可能である.

ここで, f が連続ならば, その絶対値をとった関数 $|f|$ も連続だから, 次が成り立つ:

系 9.9 (積分の三角不等式)**.** 関数 f が閉区間 $I=[a,b]$ で連続ならば, $|f|$ は積分可能で,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

が成り立つ.

証明. $|f|$ の積分可能性は $|f|$ の連続性と 9.8 からわかる. さらに, 不等式は $-|f(x)|\leqq f(x)\leqq|f(x)|$ と補題 9.4 からしたがう. □

微積分学の基本定理 (定理 9.10) は, 本節での積分の定義と高等学校での積分の定義の関係を表す重要な定理である:

[8] 連続: continuous, 連続関数: a continuous function.
[9] 後期の微分積分学第二で扱う.
[10] このことの証明は「連続性」という実数の性質によっている. 実際, 通常見られる証明では「閉区間で定義された連続関数の一様連続性」を用いるが, その証明には実数の連続性公理が必要である. 後期・微分積分学第二で余裕があれば証明の概略を紹介する.

定理 9.10 (微積分学の基本定理)**.** 区間 $I=[a,b]$ で定義された連続関数 f に対して

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

とおくと F は I で微分可能で $F'(x)=f(x)$ が成り立つ.

証明. 区間 $I=[a,b]$ の点 x と，$x+h$ が区間に入るような実数 h をとると，補題 9.6 から

$$\begin{aligned}F(x+h)-F(x)&=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\\&=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

したがって，補題 9.5, 系 9.9 を用いれば

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|&=\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\int_x^{x+h} f(x)\,dt\right|\\&=\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\bigl\{f(t)-f(x)\bigr\}\,dt\right|\leqq\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\bigl|f(t)-f(x)\bigr|\,dt\right|.\end{aligned}$$

ここで，0 に収束する任意の数列 $\{h_n\}$ を x と $x+h_n$ が区間 I に含まれるようにとる．すると，t の関数 $g(t):=|f(t)-f(x)|$ は x と $x+h_n$ を端とする閉区間 I_n で連続だから，そこで最大値をとる．とくに $g(t_n)=|f(t_n)-f(x)|\geqq g(t)$ が各 $t\in I_n$ で成り立つような $t_n\in I_n$ が存在する．とくに $t_n\in I_n$ だから $n\to\infty$ で $t_n\to x$．したがって補題 9.4 から

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqq\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} g(t_n)\,dt\right|=\frac{1}{|h|}|h|g(t_n)=g(t_n).$$

ここで $n\to\infty$ とすると g の連続性から $g(t_n)\to g(x)=0$ となるので,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=0$$

が成り立ち，結論が得られた. □

■ 原始関数と積分（定積分）の計算 1 変数関数 f の**原始関数**[11] とは $F'(x)=f(x)$ となる関数 F のことである.

[11] 原始関数：the primitive

区間 I で定義された関数 f の 2 つの原始関数 F, G は $G(x)=F(x)+$定数をみたす．実際,

$$\frac{d}{dx}\bigl\{G(x)-F(x)\bigr\}=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

なので $G(x)-F(x)$ は I で定数である．すなわち,

> 区間 I で定義された関数 f の原始関数は，定数の差をのぞいてただ一つ定まる.

命題 9.11. 区間 I で連続な関数 f には原始関数が存在する.

証明. 区間 I 内の点 a を一つ固定して

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

とおけばよい. □

例 9.12. 関数 e^{-x^2} の原始関数は (定数だけの差をのぞいて) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ である. ◇

連続関数 f に対して，その原始関数が $F(x)$ であることを

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

と書く [12]．次の命題は，高等学校では「定積分の定義」となっていたものである：

命題 9.13. 区間 I で連続関数 f の一つの原始関数を F とするとき，I の点 a, b に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

が成り立つ.

[12] “$+C$” と積分定数を書くこともある.

■ 曲線の長さ (道のり)

命題 9.14. 区間 $[a,b]$ で定義された C^1-級関数 f のグラフの長さ (弧長) は

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

で与えられる．

証明. 区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_0,x_1,\dots,x_N\}$ に対して点 $(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),\dots,(x_N,f(x_N))$ を結ぶ折れ線の長さは

$$I_\Delta=\sum_{j=1}^N\sqrt{1+\left(\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}\right)^2}\,(x_j-x_{j-1})$$

で与えられる．ここで，平均値の定理から

$$\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}=f'(\xi_j)\qquad x_{j-1}<\xi_j<x_j$$

を満たす ξ_j が存在するから，

$$I_\Delta=\sum_{j=1}^N\sqrt{1+(f'(\xi_j))^2}\,(x_j-x_{j-1})\leqq\sum_{j=1}^N\overline{F}_j\Delta_j,\qquad I_\Delta\geqq\sum_{j=1}^N\underline{F}_j\Delta_j$$

となる．ただし $F(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$ とすると

$$\overline{F}_j:=(\text{区間 }[x_{j-1},x_j]\text{ での }F\text{ の最大値}),$$
$$\underline{F}_j:=(\text{区間 }[x_{j-1},x_j]\text{ での }F\text{ の最小値}),$$

$\Delta_j=x_j-x_{j-1}$ である．ここで $F(x)$ は連続関数だから，$|\Delta|$ を 0 に近づけると I_Δ は $F(x)$ の a から b までの積分に一致する． □

系 9.15. パラメータ t により $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ と表示された平面上の C^1-級曲線の長さは

$$\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

問　題　9

9-1 高等学校の教科書では，関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

と定義していることが多い．ここではそのような定義を採用しなかった．その理由を挙げなさい．

9-2 楕円 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ について，

(1) E が囲む平面の部分の面積は πab であることを示しなさい．

(2) E の長さは

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt,\qquad k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

で与えられることを示しなさい．

(3) 地球の地軸を含む平面による切り口は，赤道方向に長軸，地軸方向に短軸をもつ楕円になる．赤道方向の半径は 6377.397km，極方向の半径は 6356.079km とするときこの楕円の周の長さの近似値を求めなさい．(ヒント：近似式 $\sqrt{1-x}\fallingdotseq 1-\frac{x}{2}$ (x が小さいとき) を用いる．40003.5 ± 0.1km くらいになるはず．)

9-3 双曲線 $x^2-y^2=1$ の第一象限の部分の 1 点を $P=(x,y)$ とする．$O=(0,0)$, $A=(1,0)$ とし，線分 OA, OP, および双曲線の弧 AP で囲まれた部分の面積を $t/2$ とするとき，P の座標 x, y を t で表しなさい．

9-4 放物線 $y=x^2$ の $0\leqq x\leqq a$ に対応する部分の長さを求めなさい．

9-5 サイクロイド

$$\gamma(t)=\bigl(t-\sin t,1-\cos t\bigr)$$

の $0\leqq t\leqq 2\pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれる図形の面積， および弧の長さを求めなさい．

9-6 空間に半径 R の球体がある．中心からの距離 r における球体の (体積) 密度が $\rho=\rho(r)\mathrm{kg/m^3}$ で与えられるとき，球体の質量を ρ を用いて表しなさい．ただし ρ は $[0,R]$ で定義された連続関数である．