10. 重積分の意味と計算

■ 1 変数関数の積分に関する補足　第 9 回で 1 変数関数の積分可能性と定積分の定義を与えたが，区間を分割して積分の値を求めるには次のやり方が有効である [1)]：

命題 10.1. 区間 $[a,b]$ の分割の列

$$\Delta^{[n]} : a = x_0^{[n]} < x_1^{[n]} < \cdots < x_{N_n}^{[n]} = b \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

で

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta^{[n]}| = 0$$

をみたすものをとる．各番号 n と $j = 1, 2, \dots, N_n$ に対して

$$\xi_j^{[n]} \in [x_{j-1}^{[n]}, x_j^{[n]}]$$

をとる．すなわち $\xi_j^{[n]}$ は $\Delta^{[n]}$ の第 j 番目の区間のある点である．もし，関数 f が $[a,b]$ で積分可能なら

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{N_n} f(\xi_j^{[n]}) \left(x_j^{[n]} - \xi_{j-1}^{[n]} \right) \right) \tag{10.1}$$

が成り立つ．

証明. 第 9 回の式 (9.1) の定義から，式 (10.1) の右辺の和を S_n とおくと，

$$\underline{S}_{\Delta^{[n]}}(f) \leqq S_n \leqq \overline{S}_{\Delta^{[n]}}(f)$$

が成り立つ．ここで f の積分可能性と $|\Delta^{[n]}| \to 0$ の仮定から，この式の両辺は $n \to \infty$ としたとき f の $[a,b]$ での定積分の値に収束する． □

■ 多変数関数の積分　ここでは，多変数（とくに 2 変数）関数の積分の定義を与える．以降，厳密な議論を行うには極限のきちんとした取り扱いが必要となるが，まず最初に本質的な部分は直観的に理解するべきである．煩雑な議論はひとまずおいて，多変数関数の積分の定義と意味を学ぼう．

[*)] 2014 年 6 月 18 日

[1)] 実際，ここでの議論は，命題 9.14 で用いている．

閉区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ に対して

$$\begin{aligned}[a,b]\times[c,d] &= \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\} \\ &= \{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\} \subset \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

を $[a,b]$ と $[c,d]$ の**直積**という [2)]．この集合は座標平面 $\mathbb{R}^2$ の長方形とその内部を表している．

いま，区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ の分割をそれぞれ

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d \tag{10.2}$$

ととると，長方形 $I = [a,b]\times[c,d]$ は，mn 個の小さな長方形に分割される：

$$I = [a,b]\times[c,d] = \bigcup_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} \Delta_{jk}, \qquad \Delta_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$$

この分割の 2 つのことなる長方形は，たかだか境界にしか共通部分をもたない [3)]．このような長方形の分割を Δ と書くとき，分割の**幅**とは

$$|\Delta| := \max\{(x_1-x_0), (x_2-x_1), \dots, (x_m-x_{m-1}), (y_1-y_0), \dots, (y_n-y_{n-1})\}$$

で与えられる正の数のことである．

■ コンパクト集合　$\mathbb{R}^2$ の部分集合が **閉集合**であるとは，その補集合が開集合 (第 3 回参照) となることである [4)]．連続関数 $f_1, \dots, f_n$ に対して

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x) \geqq 0, \dots, f_n(x) \geqq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

という形で表される集合は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である．また，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**有界**であるとは，十分大きい長方形 I をとれば $D \subset I$ となることである．$\mathbb{R}^2$ の有界な閉集合のことを**コンパクト部分集合**という [5)]．

[2)] 直積：the Cartesian product; 長方形：a rectangle.

[3)] 「たかだか」は「多くとも」の意味．少なくとも (at least) と対になる at most の訳語．

[4)] 閉集合：a closed set；補集合：the comlement.

[5)] 有界集合：a bounded set; コンパクト集合: a compact set．ここでの定義は，通常のコンパクト集合の定義とはことなるが，$\mathbb{R}^n$ の場合はこの性質をもつことがコンパクト性の必要十分条件である．

■ 長方形上の重積分 長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ で定義された関数 f と I の分割 (10.2) に対して

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_{jk},\eta_{jk})(x_{j+1}-x_j)(y_{k+1}-y_k)$$

$$(\text{ただし } \xi_{jk}\in[x_{j-1},x_j],\ \eta_{jk}\in[y_{k-1},y_k])$$

なる和を考える．分割の幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけるとき，(ξ_{jk},η_{jk}) のとり方によらずにこの和が一定の値に近づくとき，f は I で**積分可能**という．さらに，その極限値を長方形 I 上の f の**重積分**または**二重積分**といい [6]，

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy$$

と書く [7]．

■ コンパクト集合上の重積分 平面 $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合 D 上で定義された関数 f を考える．このとき，D を含む長方形 I をひとつとり，

$$\tilde f(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ((x,y)\in D)\\ 0 & ((x,y)\notin D)\end{cases}$$

と定め，I 上での $\tilde f$ が積分可能であるときに f は D で**積分可能**である，といい

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_I \tilde f(x,y)\,dx\,dy$$

と書く．この値を f の D 上での重積分という [8]．

■ 面積確定集合 コンパクト部分集合 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で，定数関数 $f(x,y)=1$ が積分可能であるとき，D を**面積確定集合**，

$$|D|:=\iint_D dx\,dy \tag{10.3}$$

を D の**面積**という [9]．

[6] 二重積分：double integral; 多重積分：multiple integral.
[7] 習慣にしたがって積分記号 $\int$ を 2 つ並べるが，ひとつしか書かない場合もある．
[8] この重積分は，コンパクト集合 D を覆う長方形 I のとり方によらない．
[9] 面積確定集合：a measurable set; 面積：area.

■ 積分可能性 コンパクト集合 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 f が**連続**である，とは D を含むある開集合 Ω 上で連続な関数 $\tilde f$ で，D 上で f と一致するものが存在すること，と定める．ここでは証明を与えないが，次のことは認めておきたい：

定理 10.2. $\mathbb{R}^2$ の面積確定なコンパクト部分集合 D 上で定義された連続関数 f は D で積分可能，すなわち

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

が存在する．

例 10.3. 平面の長方形領域 $I=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ は面積確定で $|I|=(b-a)(d-c)$ である． ◇

理論的なバックグラウンドは準備不足ではあるが，以下に重積分の計算法を挙げる．重積分の「意味」がわかれば（積分可能な関数に関しては）計算法は自明と思われる：

命題 10.4. 区間 $[a,b]$ で定義された (1 変数の) 連続関数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ が $\varphi(x)\leqq\psi(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ を満たしているとする．このとき，

$$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,\varphi(x)\leqq y\leqq\psi(x), a\leqq x\leqq b\}$$

とおく (図示せよ) と，これは $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合である．とくに，D は面積確定で，

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right]dx \tag{10.4}$$

が成り立つ．

式 (10.4) の右辺の形（1 変数関数の定積分を 2 回繰り返す）を**累次積分**という [10]．式 (10.4) の累次積分は

$$\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

と書くこともある．

[10] 累次積分：an iterated integral.

命題 10.4 が成り立つ理由. 実際，区間 $[a,b]$ の分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ をとると，その小区間 $[x_{j-1},x_j]$ に対応する D の部分

$$D_j := \{(x,y)\in D\,|\,x\in[x_{j-1},x_j]\}$$

のにおける f の積分は，分割が十分に細かいときは

$$\left[\int_{\varphi(x_{j-1})}^{\psi(x_{j-1})} f(x_j,y)\,dy\right]\Delta x_j \qquad (\Delta x_j = x_j - x_{j-1})$$

で近似される．添字 j を動かしてこれらの和をとって $|\Delta|\to 0$ とすれば，1 変数関数の積分の意味から結論が得られる． □

例 10.5. 平面の長方形領域 $I=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ を含む領域上で連続な関数 $f(x,y)$ に対して，

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

が成り立つ． ♢

例 10.6. コンパクト集合 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$ 上で関数 $f(x,y)=x^2$ を積分する：集合 D は

$$D=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}, -1\leqq x\leqq 1\right\}$$

なので，命題 10.4 から

$$\begin{aligned}\iint_D x^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^1\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right]dx\\ &= 2\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right]dx\\ &= 2\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

一方，

$$D=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{1-y^2}\leqq x\leqq\sqrt{1-y^2}, -1\leqq y\leqq 1\right\}$$

とも表されるので，

$$\begin{aligned}\iint_D x^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^1\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx\right]dy\\ &= 2\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx\right]dy\\ &= 2\int_{-1}^1\left(\frac{1}{3}\sqrt{1-y^2}^3\right)dy = 4\int_0^1\left(\frac{1}{3}\sqrt{1-y^2}^3\right)dy = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

積分の順序を交換することで計算の手間が違ってくることに注意しよう． ♢

■ 多重積分 同様に $\mathbb{R}^3$ のコンパクト部分集合 D 上での積分 (三重積分)，体積確定集合，体積，さらに一般に $\mathbb{R}^m$ 上の積分も定義される．

例 10.7.

- x 軸にそって $x=a$ から $x=b$ の区間に棒が横たわっている．このとき x における棒の線密度を $\rho(x)$ (kg/m) とすると，棒全体の質量は
$$\int_a^b \rho(x)\,dx$$
で与えられる．
- xy 平面上に，コンパクト集合 D の形に板が横たわっている．このとき 点 $(x,y)\in D$ における板の面密度を $\rho(x,y)$ (kg/m^2) とすると，板全体の質量は
$$\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$$
で与えられる．
- 空間のコンパクト集合 D の形の立体の，点 $(x,y,z)\in D$ における密度が $\rho(x,y,z)$ (kg/m^3) であるならば，立体の質量は
$$\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
である．

♢

問　題　10

10-1　$\mathbb{R}^2$ の長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ を含む領域で定義された C^2-級関数 F に対して

$$\iint_I \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dx\,dy = F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$$

であることを確かめなさい．

10-2　次の積分の値を求めなさい．

(1)
$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \qquad D=\{(x,y)\,|\,x+y\leqq 1, x\geqq 0, y\geqq 0\},$$

(2)
$$\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy, \qquad D=\{(x,y)\,|\,1\leqq y\leqq x^2, 2\leqq x\leqq 4\},$$

(3)
$$\iint_D x^2y\,dx\,dy, \qquad D=\{(x,y)\,|\,0\leqq x\leqq \pi, 0\leqq y\leqq \sin x\},$$

(4)
$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy, \qquad D=\{(x,y)\,|\,x\geqq 0, y\geqq 0, \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq 1\},$$

(5)
$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz, \quad D=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\geqq 0, x+y+z\leqq 1\}.$$

10-3　$\mathbb{R}^3$ 原点を中心とする半径 1 の球体 D の体積を

$$\iiint_D dx\,dy\,dz$$

を計算することにより求めなさい．同様のことを $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^4$ に対して行い，半径 1 の 4 次元球体，5 次元球体の“体積”を求めなさい．

10-4　座標空間の次の図形の体積を求めなさい：

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1\right\} \qquad a,\ b,\ c \text{ は正の定数.}$$

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}\leqq 1\right\} \qquad a,\ b,\ c \text{ は正の定数.}$$

10-5　$\mathbb{R}^2$ の単位閉円板 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$ を含む領域で定義された 2 つの C^1-級関数 F, G に対して

$$\begin{aligned}\iint_D &\big(G_x(x,y)-F_y(x,y)\big)\,dx\,dy\\ &=\int_0^{2\pi}\Big(-F(\cos t,\sin t)\,(\sin t)+G(\cos t,\sin t)\,(\cos t)\Big)\,dt\end{aligned}$$

が成り立つことを確かめなさい．

一般に，$\big(x(t),y(t)\big)$ $(a\leqq t\leqq b)$ とパラメータ表示された曲線 C と，2 つの 2 変数関数 F, G に対して

$$\begin{aligned}\int_C &\Big(F(x,y)\,dx+G(x,y)\,dy\Big)\\ &:=\int_a^b\Big(F\big(x(t),y(t)\big)\frac{dx}{dt}+G\big(x(t),y(t)\big)\frac{dy}{dt}\Big)\,dt\end{aligned}$$

を C に沿う $F\,dx+G\,dy$ の線積分という．閉円板の連続変形で得られるコンパクト集合 $\widetilde{D}$ の境界がなめらかな曲線 C となっているとき，

$$\iint_{\widetilde{D}}\big(G_x(x,y)-F_y(x,y)\big)\,dx\,dy=\int_C\Big(F(x,y)\,dx+G(x,y)\,dy\Big)$$

が成り立つ（グリーン・ストークスの定理；証明は省略する）．これは命題 9.11 の 2 次元版である．