11. 重積分の応用

重積分，多重積分は面積，体積などを求めるのに利用できる．ここでは厳密な扱いはせず「微小部分の面積，体積の総和」の極限が面積，体積であると信じて具体例の計算を行おう．

■ **面積**　第 10 回（75 ページ）のように $\mathbb{R}^2$ の面積確定集合 D の面積とは，D 上で定数関数 1 を積分したものである．

例 11.1. $D = \{(x,y) \,|\, \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ の面積 $|D|$ を求めよう．図形の対称性から

$$D' := \{(x,y) \,|\, \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$$

の面積 $|D'|$ を求めれば $|D| = 4|D'|$ である．

$$|D'| = \iint_{D'} 1\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3} dx = \int_0^1 \left[\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3\right] dy = \frac{3\pi}{32}.$$

したがって求める面積は $3\pi/8$.　◇

■ **体積（2 変数関数のグラフの下側）**　一般に，$\mathbb{R}^2$ の面積確定集合 D を含む領域で定義された連続関数 f が負でない値をもつとき，

$$\Omega_f := \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in D; 0 \leqq z \leqq f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

は，座標空間 $\mathbb{R}^3$ 内の，f のグラフと xy 平面にはさまれる部分である．この部分の体積を求めよう．D の点 (x,y) を一つの頂点とする D の小さな長方形 $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$ と，この長方形上の $f(x,y)$ のグラフで囲まれた部分の体積は，

$$f(x,y)\Delta x \Delta y$$

*) 2014 年 7 月 2 日

で近似されるので，考えている図形の体積は

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

で与えられる．

例 11.2. 関数

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \qquad (a,b \text{ は正の定数})$$

のグラフと xy 平面で囲まれた部分の体積を求めよう．$f(x,y)$ は

$$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$$

上で負でない値をとっている．したがって，考えている図形の体積は

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\pi ab$$

であることがわかる．　◇

■ **体積**　平面図形の面積と同様に，$\mathbb{R}^3$ の体積確定集合 Ω の**体積**とは [1)]，Ω 上で定数関数 1 を積分したものである．

例 11.3. 空間の部分集合 $D = \{(x,y,z) \,|\, z^2 \leqq 4x, y^2 \leqq x - x^2\}$ の体積 $|D|$ を求めよう．平面の部分集合 $D' = \{(x,y) \,|\, y^2 \leqq x - x^2\}$ に対して

$$\begin{aligned} |D| &= \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{D'} dx\,dy \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dz \\ &= \iint_{D'} 4\sqrt{x}\,dx\,dy = \cdots = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

◇

1) 体積：volume; ここでは $\mathbb{R}^3$ の体積確定集合の定義をきちんとはしていないが，$\mathbb{R}^2$ における面積確定集合，重積分の定義から想像してもらえばよい．

■ **曲面の面積**　グラフ $z = f(x, y)$ $((x, y) \in D)$ の面積を求めよう．ただし D は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合で，f は D 上で C^1-級とする．

集合 D 上の小さな長方形 $[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y]$ 上のグラフは空間の 3 点

$$\begin{aligned} P &= \bigl(x, y, f(x, y)\bigr), \\ Q &= \bigl(x + \Delta x, y, f(x + \Delta x, y)\bigr), \\ R &= \bigl(x, y + \Delta y, f(x, y + \Delta y)\bigr) \end{aligned}$$

を頂点にもち PQ, PR を 2 辺にもつ平行四辺形に近い．この微小平行四辺形の面積は，空間ベクトルの外積 (ベクトル積) を用いて

$$\begin{aligned} &|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| \\ &= |(\Delta x, 0, f(x + \Delta x, y) - f(x, y)) \times (0, \Delta y, f(x, y + \Delta y) - f(x, y))| \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right)^2}\, \Delta x \Delta y \\ &\fallingdotseq \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}\, \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

と書けるので，この総和をとれば，求める面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dx\, dy \tag{11.1}$$

で求められる．

例 11.4. 関数 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ のグラフの，$D = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ に対応する部分の面積を求めよう．式 (11.1) を適用すれば，求める面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dy$$

である．これを計算すると，求める面積は

$$\frac{1}{18}\left(6\bigl(\sqrt{3} + \log(7 + 4\sqrt{3})\bigr) - \pi\right) = 1.28\ldots$$

である．◇

■ **密度と質量**　例 10.7 で結論だけのべた密度と質量の関係をまとめておく．

□ **棒の線密度**　長さ lm の一様な棒の質量が Mkg であるとすると，この棒の 1m あたりの質量は $\rho := (M/l)$kg/m である．この量 ρ を棒の**線密度**という [2]．一様でない棒についても密度を考えることができる：数直線（x 軸と考える）上の区間 $[a, b]$ の部分に一様とは限らない棒が横たわっているとする．いま $x \in [a, b]$ に対して，この棒の，区間 $[a, x]$ に相当する部分の質量が $M(x)$kg であったとすると，この棒の，区間 $[x, x + \Delta x]$ に対応する部分の質量は $M(x + \Delta x) - M(x)$ となる．したがって，この部分の（平均）**線密度**は

$$\frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} \qquad \mathrm{kg/m}$$

で求められる．点 x は固定しておいて Δx をどんどん小さくしていくと，この値は M の導関数 $M'(x)$ に近づく．これを棒の点 x における**線密度** という．

このことから，もし線密度 $\rho(x)$ が与えられているならば，棒全体の質量は

$$\int_a^b \rho(x)\, dx \qquad \mathrm{kg}$$

で求められることがすぐにわかる．

■ **板と面密度**　面積 Am^2 の一様な板の質量が Mkg であるとき，単位面積あたりの板の質量は $M/A(\mathrm{kg/m^2})$ となる．この量を板の**面密度**という．平面 (xy 平面とみなす) の面積確定集合 D 上に一様とは限らない板が横たわっているとする．このとき，点 $(x, y) \in D$ をふくむ十分小さい部分 Δ 上での板の平均面密度を考える．Δ をどんどん小さくしていって一点 (x, y) に縮めるとき,（その極限のとりかたによらず）平均面密度が一定の値 $\rho(x, y)$ に近づくとき，$\rho(x, y)$ を板の (x, y) における**面密度**という [3]．点 (x, y) を含む長方形 $[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y]$ の部分の板の面積は $\Delta x\, \Delta y$ であるから，板

[2] 線密度：line density，面密度：surface density，体積密度：volume density, density.

[3] この「極限」のとり方は，偏微分や全微分を考える際の極限のとりかたと少し違っている（大げさにいえば「測度論的微分」）．この授業ではこれに深入りすることはさけ，与えられた面密度の板の質量というものを考えることにする．

の質量は

$$\rho(x,y)\,\Delta x\,\Delta y$$

で近似されるので，板全体の質量は

$$\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy \qquad \mathrm{kg}$$

で求められる．

■ **体積密度**　同様のことを空間の物体について考えれば，**体積密度**（単に密度という）を考えることができる．$\mathbb{R}^3$ の体積確定集合 Ω を，密度 $\rho(x,y,z)\mathrm{kg/m^3}$ の物体が占めているとするとき，この物体の質量は

$$\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad \mathrm{kg}$$

で与えられる．

これらの密度と質量の関係を想像すれば多重積分の意味はだいたい分かるはずである．被積分関数が符号を変える場合は，このイメージに合わないかもしれないが，そのときは密度（質量密度）の代わりに電荷密度を考えれば積分の意味を想像しやすいだろう．

例 11.5.　(1)　数直線上の区間 $[0,1]$ に，点 x における線密度が $x^2\mathrm{kg}/m$ となるような棒がある．この棒の質量は

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\mathrm{kg}$$

である．

(2)　三角形

$$D = \{(x,y)\,|\,x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1\}$$

の板の点 (x,y) における面密度が $xy\mathrm{kg/m^2}$ であるとする．この板の質量は

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy\,dy = \frac{1}{24}\mathrm{kg}$$

である．

(3)　空間に半径 R の球体

$$B = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leqq R^2\}$$

があって，その密度が原点からの距離 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のみの関数 $\rho(r)\mathrm{kg/m^3}$ で表されているとする．この球体の質量は

$$\iiint_B \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz \qquad \mathrm{kg}$$

で与えられる．この値が 1 変数関数の積分

$$4\pi \int_0^R \rho(r)\,dr$$

で与えられることは，第 9 回の問題 9-6 見た．このことは，次回，重積分の変数変換の際にもう一度扱う．　◇

問　題　11

11-1　双曲線 $C = \{(x,y)\,|\,x^2-y^2=-1\}$ と正の数 t をとり，点 $P(t,0)$ を通り x 軸に垂直な直線と C との交点のうち第一象限にあるものを Q とする．直線 $x=t$，x 軸，y 軸および曲線 C で囲まれた第一象限の部分を D_1，三角形 OPQ とその内部を D_2 とするとき，

(1)　D_1 の面積 $A_1(t)$ と D_2 の面積 $A_2(t)$ を，それぞれ t の式で表しなさい．

(2)　極限値

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{A_1(t)-A_2(t)}{\log t}$$

を求めなさい．

11-2　空間の集合

$$\Omega := \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1, y^2+z^2 \leqq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

の体積を求めなさい．

11-3 空間の原点を中心とする半径 $R\ (>0)$ の球面

$$S_R = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=R^2\}$$

の，北極 $N=(0,0,R)$ とそれ以外の球面 S_R 上の点 P を結ぶ球面上の曲線のうち最短のものは，P を通る経線である．このことを既知として，N と P を結ぶ経線の長さを N と P の（球面）距離という．さらに，北極を中心とする半径 r の円とは，N との距離が r であるような球面上の点の集合のことと定める．以下，北極 N を中心とする半径 r の円を C_r と書く．

(1) C_r はどんな図形か．緯度，経度などの言葉を用いて説明しなさい．

(2) C_r の長さ L_r を r の式で表しなさい．(ヒント：平面の円とみなしたときの半径を求めれば良い)．

(3) C_r を境界にもつ球面 S_R の部分で，北極 N を含む部分の面積 A_r を r の式で表しなさい．ただし，$0<r<\pi R/2$ とする．

(4) 次の極限値を求めなさい：

$$\lim_{r\to+0}\frac{L_r}{2\pi r}, \qquad \lim_{r\to+0}\frac{A_r}{\pi r^2}.$$

11-4 xy 平面上の面積確定集合 D が上半平面 $\{(x,y)\,|\,y>0\}$ に含まれているとする．このとき，次のことを確かめなさい．

(1) xy 平面が座標空間に含まれているとみなす．D を x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積は

$$2\pi\iint_D y\,dx\,dy$$

である．

(2) D の重心の座標は

$$\frac{1}{|D|}\left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy\right) \qquad \left(|D| = \iint_D dx\,dy\right)$$

である．

11-5 xy 平面上のなめらかな曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\bigl(f'(x)\bigr)^2}\,dx$$

で与えられることを確かめなさい．ただし，区間 $[a,b]$ 上で $f(x)>0$ であるとする．

11-6 xy 平面上の曲線 C が

$$C : \gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

とパラメータ表示されている．ただし $x(t)$, $y(t)$ は t の一変数関数として C^1-級で，区間 $[a,b]$ で $y(t)>0$ であるとする．このとき，次のことを確かめなさい．

(1) 曲線 C を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

(2) 曲線 C の重心の座標は

$$\frac{1}{L}\left(\int_a^b x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt, \int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$

$$\left(L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$

で与えられる．