12. 重積分の変数変換

■ 置換積分法の公式（一変数） 一変数関数の置換積分法[1] の公式は高等学校で学んだ．ここでは，変数変換が増加関数で与えられる特別な場合に，公式を述べておこう：

定理 12.1 (置換積分法)**.** 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f と，区間 $[\alpha,\beta]$ を含む開区間で定義された単調増加な C^1-級関数 φ で $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ をみたすものをとる．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(u)\bigr)\,\varphi'(u)\,du \tag{12.1}$$

が成立する[2]．

注意 12.2. 変数変換を $x=x(u)=\varphi(u)$ と書いて，式 (12.1) の右辺を

$$\int_\alpha^\beta f\bigl(x(u)\bigr)\frac{dx}{du}\,du$$

と書くと覚えやすい．

置換積分法の公式（定理 12.1）が成り立つ理由の説明． 公式 (12.1) の証明は高等学校で学んだ．合成関数の微分公式を用いて原始関数を求めるという方法だったはずだが，連続関数の積分可能性と微積分の基本定理を認めれば，厳密な証明である．

ここでは，さらに別の説明を与える．多重積分の変数変換の公式を考える際には，微積分の基本定理を直接使うことができないので，積分の定義に沿った理解が必要と思われるからである．

区間 $[\alpha,\beta]$ の分割 $\Delta:\alpha=u_0<u_1<\dots<u_N=\beta$ をとり，$x_j=\varphi(u_j)$ $(j=0,1,\dots,N)$ とおけば，φ が単調増加であることから $\Delta': x_0<x_1<\dots<x_N$ は区間 $[a,b]$ の分割となる．

いま，一つの小区間 $[u_{j-1},u_j]$ に着目すると，φ' はこの区間で連続だから，最小値・最大値をとる．そこで，φ' が $\underline{\eta}_j$, $\overline{\eta}_j\in[u_{j-1},u_j]$ でそれぞれ最小値・最大値をとるとすると，補題 9.4 から

[*] 2014 年 7 月 9 日

[1] 置換積分法：integration by substitution.

[2] 変数変換 φ に C^1-級の仮定を付けたのは，式 (12.1) の右辺の被積分関数が連続関数になってほしいからである．

$$x_j-x_{j-1}=\varphi(u_j)-\varphi(u_{j-1})=\int_{u_{j-1}}^{u_j}\varphi'(u)\,du\leqq\varphi'(\overline{\eta}_j)(u_j-u_{j-1}),$$
$$x_j-x_{j-1}\geqq\varphi'(\underline{\eta}_j)(u_j-u_{j-1})$$

が成り立つので，

$$\varphi'(\underline{\eta}_j)(u_j-u_{j-1})\leqq x_j-x_{j-1}\leqq\varphi'(\bar{\eta}_j)(u_j-u_{j-1}) \tag{12.2}$$

を得る．この式は，小区間の幅 u_j-u_{j-1} と，対応する小区間の幅 x_j-x_{j-1} の比が $1:\varphi'$ であることを示している（$\varphi'(*)$ の $*$ は明示していないが，区間 $[u_{j-1},u_j]$ の中の値である.）

以上の状況で，

$$g(u):=f\bigl(\varphi(u)\bigr)\varphi'(u),\qquad \underline{\xi}_j=\varphi(\underline{\eta}_j),\qquad \overline{\xi}_j=\varphi(\overline{\eta}_j)$$

とおくと，

$$g(\underline{\eta}_j)(u_j-u_{j-1})=f(\underline{\xi}_j)\varphi'(\underline{\eta}_j)(u_j-u_{j-1})\leqq f(\underline{\xi}_j)(x_j-x_{j-1})$$
$$g(\overline{\eta}_j)(u_j-u_{j-1})=f(\overline{\xi}_j)\varphi'(\overline{\eta}_j)(u_j-u_{j-1})\geqq f(\overline{\xi}_j)(x_j-x_{j-1}).$$

したがって

$$\underline{S}_\Delta(g)\leqq\sum_{j=1}^N f(\underline{\xi}_j)(x_j-x_{j-1}),\qquad \overline{S}_\Delta(g)\geqq\sum_{j=1}^N f(\overline{\xi}_j)(x_j-x_{j-1})$$

となる．

いま (12.2) から $|\Delta|\to0$ ならば $|\Delta'|\to0$ である．さらに，仮定から f, g はともに連続なので，積分可能性から，これらの不等式の各辺は，$|\Delta|$ を 0 に近づけると，それぞれ g, f の積分に近づく．したがってこれらの積分の値は等しい． □

■ 線形変換と面積 置換積分法の公式 (12.1) の右辺に φ' がかかるのは，$[a,b]$ の微小区間の幅と，対応する $[\alpha,\beta]$ の微小区間の幅の比が φ'（式 (12.2)）だからである．

このことから，2 変数関数の変数変換公式は，変数変換によって面積がどのように変化するかによることがわかる．そこで，まず，線形変換による面積比の公式を思い出そう：$\mathbb{R}^2$ の線形変換

$$L_A\colon\mathbb{R}^2\ni\boldsymbol{x}\longmapsto\boldsymbol{X}=A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\qquad(A\text{ は 2 次の正方行列})$$

を考える．行列 A が正則，すなわち $\det A \neq 0$ ならば L_A は逆写像をもつ．とくに L_A は 1 対 1 の写像 (単射) である．行列 A が正則であるとき L_A を **正則な線形変換** とよぶ．

補題 12.3. 線形変換 L_A による $\mathbb{R}^2$ の直線の像は直線または一点である．とくに L_A が正則ならば直線の像は直線になる．

証明． 異なる 2 点 $P, Q \in \mathbb{R}^2$ を結ぶ直線 l の像を調べよう．P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とすると直線 l は

$$l = \{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

と表される．ここで L_A の線形性から

$$L_A\big((1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}\big) = (1-t)A\boldsymbol{p} + tA\boldsymbol{q}$$

なので，l の L_A による像は

$$l' = \{(1-t)\tilde{\boldsymbol{p}} + t\tilde{\boldsymbol{q}} \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \tilde{\boldsymbol{p}} = A\boldsymbol{p}, \quad \tilde{\boldsymbol{q}} = A\boldsymbol{q}$$

とかける．とくに $\overrightarrow{OP'} = \tilde{\boldsymbol{p}}$, $\overrightarrow{OQ'} = \tilde{\boldsymbol{q}}$ となる点 P', Q' をとると (1) $P' \neq Q'$ のとき，l' は P', Q' を通る直線となる．(2) $P' = Q'$ のとき l' は P' 1 点からなる集合である．さらに $\det A \neq 0$ なら写像 L_A は 1 対 1 であるから (2) のケースは起こりえない．□

補題 12.4. 正則な線形変換 L_A による $\mathbb{R}^2$ の平行な 2 直線の像は平行な 2 直線である．

証明． 平行な 2 直線の像は 2 つの直線であるが，これらが交わるとすると L_A が 1 対 1 であることに反する．□

補題 12.5. 直線 l 上の異なる 2 点 P, Q をとっておく．直線 l にない 2 点 R, S が直線 l の同じ側にあるための必要十分条件は，$\det(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$ と $\det(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ})$ が同じ符号をもつことである．ここで $\mathbb{R}^2$ のベクトルは列ベクトルとみなし，det は 2 つの 2 次列ベクトルを並べてできる行列の行列式を表す．

証明． ${}^t(a,b) = \overrightarrow{PQ}$ とおき，$\boldsymbol{n} = {}^t(-b,a)$ とすると，(1) $\det(\overrightarrow{PQ}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ である．ただし右辺は $\mathbb{R}^2$ の内積を表す．(2) $\boldsymbol{n}$ は直線 l に直交する零でないベクトルである．

直線 l 上にない点 R が，直線 l の $\boldsymbol{n}$ が指し示す側にあるための必要十分条件は $\overrightarrow{PR}$ と $\boldsymbol{n}$ が鋭角をなすことである：$(\overrightarrow{PR}, \boldsymbol{n}) > 0$．このことと (1) から結論が得られる．□

補題 12.6. 線形変換 L_A によって，$\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部は $\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部，または線分に移る．とくに L_A が正則ならば平行四辺形の像は平行四辺形である．

証明． 簡単のため L_A が正則であるとし，平行四辺形 $PQRS$ の像を求める：$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$ とすると，線分 PQ は $\{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ となるので，その像は線分 P', Q' となる．ただし P', Q' はそれぞれ L_A による P, Q の像．各辺に対して同様のことを考えれば，平行四辺形の像が平行四辺形となることがわかる．さらに，平行四辺形の内部は 4 つの辺を含む直線の一方の側の共通部分なので，補題 12.5 から結論を得る (すこし端折った)．□

補題 12.7. 平行四辺形 $PQRS$ の面積は $|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ である．ただし $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR}$ で，これらを 2 次の列ベクトルとみなしている．

証明． ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，求める面積は

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\sin\theta| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}. \tag{12.3}$$

ただし $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積を表す．ここで $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2)$ とおいて (12.3) を計算すれば結論を得る．□

補題 12.8. 線形変換 L_A による平行四辺形 D の像の面積は，$|\det A|\,|D|$ である．ただし $|D|$ は D の面積である．

証明． 平行四辺形 $D = PQRS$ の各頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ とし，

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$$

とおく．P, Q, R の L_A による像をそれぞれ P', Q', R' と書くと，

$$\overrightarrow{P'Q'} = A\boldsymbol{q} - A\boldsymbol{p} = A(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{P'R'} = A\boldsymbol{b}$$

であるから

$$|D'| = |\det(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b})| = \big|\det\big(A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\big)\big| = \big|\det A \cdot \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\big| = |\det A|\,|D|.$$

□

■ **2 変数の変数変換**　$\mathbb{R}^2$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$F\colon \mathbb{R}^2 \supset (u,v) \longmapsto F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^2$$

を考えると，微分可能性（定義 3.6 と命題 3.11 参照）[3] から，

$$\begin{aligned} &F(a+h, b+k) \\ &\qquad = F(a,b) + \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\boldsymbol{\varepsilon}(h,k) \\ &\qquad\qquad\qquad |\boldsymbol{\varepsilon}(h,k)| \to 0 \qquad \bigl((h,k)\to(0,0)\bigr) \end{aligned}$$

と書ける．この ${}^t(h,k)$ の係数行列は，F の微分 dF またはヤコビ行列 (定義 6.4) である．このことから，(h,k) が十分小さいときは，近似式

$$\Phi(h,k) := F(a+h,b+k) - F(a,b) \fallingdotseq \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \tag{12.4}$$

が成り立つ．

記号． ヤコビ行列の行列式を

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

と書き，**ヤコビ行列式** という [4]．

近似式 (12.4) から次のことがわかる：

事実 12.9. 十分小さい Δu, Δv に対して，uv-平面上の，点

$$(a,b), \quad (a+\Delta u, b), \quad (a, b+\Delta v), \qquad (a+\Delta u, b+\Delta v)$$

を頂点とする長方形を変数変換 $F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ で写した像は，

[3] 定義 3.6 は実数に値をとる関数の微分可能性の定義だが，各成分 $x(u,v)$, $y(u,v)$ が微分可能な関数なので，それらが定義の条件式をみたすことがわかる．とくに x, y に対応する “おつり” の項を ε_1, ε_2 とおいて $\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ とすれば，ここで与える式を得る．

[4] ヤコビ行列式：the Jacobian.

$$\begin{aligned} &\bigl(x(a,b), y(a,b)\bigr), \\ &\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u, y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u\bigr), \\ &\bigl(x(a,b) + x_v(a,b)\Delta v, y(a,b) + y_v(a,b)\Delta v\bigr), \\ &\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u + x_v(a,b)\Delta v, y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u + y_v(a,b)\Delta v\bigr) \end{aligned}$$

を頂点とする平行四辺形に十分に近い．とくに，像の面積は

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$$

で近似される．ただし，この係数は，変数変換のヤコビ行列式の絶対値を表す．

■ **重積分の変数変換**　重積分は，考えている集合上の微小部分の面積と関数の値の積の総和の極限だから，変数変換による面積の関係（事実 12.9）から次が成り立つことがわかる：

定理 12.10 (重積分の変数変換)**.** $\mathbb{R}^2$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$(u,v) \longmapsto \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$$

によって，uv 平面上の面積確定集合 E が xy 平面上の面積確定集合 D と 1 対 1 に対応しているとき，D 上の連続関数 f に対して

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

が成り立つ．

例 12.11. 重積分

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} \qquad D := \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2, x \geqq 0\}$$

を求めよう（まずは，第 10 回でやったように計算してみよ）．座標変換

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{12.5}$$

により集合

$$E := \left\{(r,\theta) \;\middle|\; 1 \leqq r \leqq \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

は D に 1 対 1 に移される．変数変換 (r,θ) のヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

なので，定理 12.10 から

$$\int_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \int_E \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r\,dr}{1+r^2}\right] d\theta = \frac{\pi}{2}\log\frac{3}{2}$$

を得る．直接求めた値と比較せよ． ♢

注意 12.12. 例 12.11 で積分範囲を

$$D_1 := \{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq \sqrt{2}\}, \qquad D_2 := \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq \sqrt{2}\}$$

と拡張しよう．変数変換 (12.5) により，

$$E_1 := \{(r,\theta)\,|\,1 \leqq r \leqq \sqrt{2}, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\},$$
$$E_2 := \{(r,\theta)\,|\,0 \leqq r \leqq \sqrt{2}, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$$

は，それぞれ D_1, D_2 に「ほぼ 1 対 1」に写るが，D_1 上の x 軸の負の部分，D_2 上の原点には，重なりがある．しかし，この部分の面積は 0 なので積分に影響せず，変数変換

$$\iint_{D_j} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \iint_{E_j} \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2}$$

が成り立つ．

■ 多重積分の変数変換公式 同様に多重積分の変数変換の公式を次のように述べることができる：

定理 12.13 (多重積分の変数変換)**.** $\mathbb{R}^n$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$(u_1,\dots,u_n) \longmapsto \bigl(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_n(u_1,\dots,u_n)\bigr)$$

によって，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 E がコンパクト集合 D に 1 対 1 に対応しているとき，D 上の連続関数 f に対して

$$\begin{aligned}\int\dots\int_D f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n \\ = \int\dots\int_E f\bigl(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_n(u_1,\dots,u_n)\bigr)\,|J|\,du_1\,du_2\,\dots\,du_n\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，

$$J := \frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)} = \det\begin{pmatrix} (x_1)_{u_1} & \dots & (x_1)_{u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n)_{u_1} & \dots & (x_n)_{u_n} \end{pmatrix}$$

である．

問 題 12

12-1 問題 10-2 の各々の積分を，次の変数変換を行うことによって求め，直接計算した結果と比較しなさい．

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(2) $x = uv$, $y = v$.

(3) $x = u$, $y = v\sin u$.

(4) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(5) $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$.

12-2 問題 9-6 を，変数変換

$$(x,y,z) = \bigl(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi\bigr)$$

を用いて説明しなさい（例 10.7 参照）．

12-3 C^1-級の 1 変数関数 φ が $\varphi(0)=0$ を満たしているとき，

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(u)\,du$$

の右辺を $u = tx$ と変数変換して t に関する積分とみなすことにより，

$$\varphi(x) = x\psi(x)$$

をみたす 連続関数 ψ が存在することを示しなさい（これは，多項式に関する因数定理の一般化とみなすことができる）．