13. 広義積分

■ 広義積分 半開区間 $(a,b]$ で定義された連続関数 f に対して

$$\text{極限値}\quad \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad \text{が存在するとき，その値を}\quad \int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．関数 f が $[a,b)$ で連続であるときも同様に $\int_a^b f(x)\,dx$ が定義される．

また，区間 $[a,\infty)$ で定義された連続関数 f に対して

$$\text{極限値}\quad \lim_{M\to+\infty}\int_{a}^{M} f(x)\,dx \quad \text{が存在するとき，その値を}\quad \int_a^\infty f(x)\,dx$$

と書く．同様に $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ も定義される．

これらは定積分の概念を拡張したもので**広義積分** [1] とよばれる．とくに，定義のなかに現れる極限値が存在するとき**広義積分は収束する**，そうでないとき**発散する**という．

例 13.1. (1) 正の数 $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \to 2 \qquad (\varepsilon\to+0)$$

なので，区間 $(0,1]$ での広義積分は収束し，

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

(2) 正の数 $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_\varepsilon^1 = \log 1 - \log\varepsilon = -\log\varepsilon \to +\infty \qquad (\varepsilon\to+0)$$

なので，区間 $(0,1]$ での次の広義積分は発散する：

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

(3) 正の数 M に対して

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = \bigl[-e^{-x}\bigr]_0^M = 1-e^{-M} \to 1 \qquad (M\to+\infty)$$

なので，区間 $[0,+\infty)$ での広義積分は収束し，

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

(4) 正の数 M に対して

$$\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^M = \log M \to +\infty \qquad (M\to+\infty)$$

なので，区間 $[1,+\infty)$ での次の広義積分は発散する：

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx. \qquad \diamondsuit$$

次の事実は基本的である（問題 13-1）：

命題 13.2. (1) 実数 α に対して，広義積分

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx$$

が収束するための必要十分条件は $\alpha > -1$ である．

(2) 実数 β に対して，広義積分

$$\int_1^\infty x^\beta\,dx$$

が収束するための必要十分条件は $\beta < -1$ である．

(3) 実数 a に対して，広義積分

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$$

が収束するための必要十分条件は $a > 0$ である．

例 13.3. 原始関数が求まらなくても，広義積分の収束がわかる場合がある．たとえば，定数 $k\in(0,1)$ に対して広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \tag{13.1}$$

[*] 2014 年 7 月 16 日

[1] “こうぎせきぶん” と読む．“広義” は “広い意味” という意味．特異積分 improper integral ということもある．

を考えよう．正の数 $\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \qquad (x=\sin t)$$

であるが，右辺の被積分関数は $[0,\frac{\pi}{2}]$ で連続であるから，$\varepsilon \to +0$ の極限をとることができて [2)]

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt. \qquad \diamondsuit$$

関数 $f(x)$ が (a,b) で連続な場合は

$$\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx$$

が $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \to (0,0)$ である値に収束するとき，その極限値を広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx \left(= \lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(0,0)} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx\right)$$

と定める．区間の一端または両端が有限でない場合 [3)] も同様に定義する．

例 13.4. 正の数 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x}{1-x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{2}\log(1-x^2)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\
&= -\left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\
&= -\frac{1}{2}\bigl(\log\varepsilon_2 + \log(2-\varepsilon_2) - \log(2-\varepsilon_1) - \log\varepsilon_1\bigr)
\end{aligned}$$

であるが，$\varepsilon_1 \to +0$ のとき，右辺の最後の項は発散するので，広義積分

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

[2)] 原始関数の連続性は，微分可能性（定理 9.10）による．

[3)] 不正確な言い方だが...

は発散する．特別な近づけ方で $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \to (0,0)$ とすると，たとえば $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \to +0$ のとき

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0 \to 0$$

となるが，

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx = 0 \qquad \text{であるとはいわない．} \qquad \diamondsuit$$

■ **広義積分の収束判定** 広義積分の値が具体的にわからなくても，収束することはわかる場合がある．

事実 13.5. 区間 $I=(a,b]$ で定義された連続関数 $f,\ g$ がともに I 上で $f(x) \geqq 0,\ g(x) \geqq 0$ を満たし，さらに

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (x \in I), \qquad \text{かつ} \qquad \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{が収束する}$$

ならば，広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

は収束する．

この事実の証明は“実数の連続性”による．余裕があれば後期に説明するかもしれない [4)]．

有用な例を挙げるため，少しだけ準備をしておく：

補題 13.6. 任意の正の整数 m に対して，次の不等式が成立する：

$$x^m \leqq m!e^x \qquad (x \geqq 0).$$

証明． 負でない整数 m に対して $f_m(x) = m!e^x - x^m$ とおき，m に関する数学的帰納法により $f_m(x) \geqq 0$ を示す．$x \geqq 0$ のとき $(e^x - x)' = e^x - 1 \geqq 0$ であるから，$e^x - x$ は単調非減少．したがって $e^x - x \geqq e^0 - 0 = 1$．すなわち $f_1(x) \geqq 0$ が成り立つ．いま，番号 k に対して $f_k(x) \geqq 0$ $(x \geqq 0)$ が成り立っているとすると，$f'_{k+1}(x) = kf_k(x)$ なので，f_{k+1} は $x \geqq 0$ で単調非減少 [5)]．したがって $x > 0$ のとき $f_{k+1}(x) \geqq f_{k+1}(0) = m! > 0$． □

[4)] 少なくとも，これと関連した話題を級数の収束判定の項で説明する．

[5)] 定義域で $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$ が成り立つとき，関数 f は単調非減少であるという．

系 13.7. 任意の負でない実数 p に対して

$$x^p \leqq Me^x \qquad (x \geqq 0)$$

が成立する．ただし $M = ([p]+1)!$ ($[p]$ は p を超えない最大の整数) である．

証明． まず $0 \leqq x \leqq 1$ なら左辺は 1 以下，右辺は 1 以上であるから結論が成り立つ．$x > 1$ のときは $x^p \leqq x^{[p]+1}$ なので，$m = [p]+1$ とおいて補題 13.6 を適用する．□

系 13.8. 任意の実数 p と正の実数 a に対して

$$\lim_{x\to+\infty} x^p e^{-ax} = 0.$$

証明． $p \leqq 0$ のとき $x \geqq 1$ ならば $x^p \leqq 1$ だから，

$$0 \leqq x^p e^{-ax} \leqq e^{-ax} \to 0 \qquad (x \geqq 1, x \to +\infty).$$

$p \geqq 0$ のときは，補題 13.6 を x の代わりに $ax/2$ として適用すると，$x \geqq 0$ に対して

$$\left(\frac{a}{2}\right)^p x^p \leqq ([p]+1)! e^{ax/2} \tag{13.2}$$

が成り立つので，

$$0 \leqq x^p e^{-ax} \leqq \left(\frac{a}{2}\right)^p ([p]+1)! e^{-ax/2} \to 0 \qquad (x \to +\infty)$$

となり「はさみうち」から結論が得られる．□

命題 13.9. 任意の実数 p に対して，次の広義積分は収束する：

$$\int_1^\infty x^p e^{-ax}\,dx$$

証明． 系 13.8 の証明の中の (13.2) を用いれば，

$$x^p e^{-ax} \leqq e^{-ax/2}$$

だが，$a > 0$ だから，右辺の $[1, +\infty)$ での広義積分は，命題 13.2 から収束する．したがって事実 13.5 から，与えられた広義積分は収束する．□

例 13.10. 負でない実数 p に対して次の広義積分は収束する：

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2}\,dx.$$

このことを確かめよう．被積分関数は 0 で連続だから $[0, 1]$ 区間では積分可能．したがって $[1, +\infty)$ での収束を考えればよい．ここで $x \geqq 1$ なら $e^{-x^2} \leqq e^{-x}$ なので，

$$0 \leqq x^p e^{-x^2} \leqq x^p e^{-x} \qquad (x \geqq 1).$$

命題 13.9 から右辺の $[1, +\infty)$ での広義積分は収束するから，事実 13.5 から考えている広義積分は収束する．◇

注意 13.11. とくに $p = 0$ とすると，

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

は収束する．この積分を**ガウス積分**[6] という．第 14 回で求めるように，この値は $\sqrt{\pi}$ である．

■ **関数の定義**　積分を用いて具体的な関数を定義することがある．たとえば，例 13.3 の積分 (13.1) の上端を不定にして

$$E(x,k) := \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

とすると，x, k を変数とする 2 変数関数が得られる[7]．これを第二種楕円積分という．さらに

$$E(1,k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$$

は k $(0 \leqq k < 1)$ の関数である．これを第二種完全楕円積分という[8]．関数 $E(x,k)$ は初等関数で表せないことが知られているが，連続関数の積分可能性（定理 9.10）から，$x \in [0,1]$, $k \in (0,1)$ に対して確かに値が定まることがわかる．

広義積分を用いて関数を定義するには，広義積分が収束することを確かめる必要がある．

例 13.12 (ガンマ関数)**.** 実数 $s > 0$ に対して広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \tag{13.3}$$

[6] ガウス積分：the Gaussian integral; Gauss (Gauß), Carl Friedlich (1777–1855, G).

[7] よく使われる状況では k を固定して x の関数と考える．

[8] 第二種楕円積分：the elliptic integral of the second kind, 第二種完全楕円積分：the complete elliptic integral of the second kind. 第 n 種楕円積分 $(n = 1, 2, 3)$ が定義されるが，ここでは名前だけで深入りしない

は収束する（問題 13-2）．そこで

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \qquad (s > 0)$$

とおき，これを**ガンマ関数**とよぶ． ♢

例 13.13 (ベータ関数)**.** 正の実数 p, q に関して広義積分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束する（問題 13-4）．このようにして得られる 2 変数関数を**ベータ関数**とよぶ[9]． ♢

問　　題　　13

13-1　命題 13.2 を確かめなさい．

13-2　例 13.12 の広義積分 (13.3) が収束することを確かめなさい．（注意：この積分は区間の上端も下端も広義積分になっているので，たとえば $(0,1]$ での積分と $[1,+\infty)$ での積分の収束を別々に示す必要がある．各々の収束性は事実 13.5 と命題 13.2 などを用いて示す．）

13-3　任意の正の数 s に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であることを示しなさい．これを用いて，正の整数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを確かめなさい．

13-4　例 13.13 の広義積分が収束することを確かめなさい．

13-5　$[0,+\infty)$ で定義された関数 $f(t)$ に対して

$$\hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (*)$$

で与えられる s の関数 $\hat{f}$ を f のラプラス変換という[10]．つぎを確かめなさい．

(1)　関数 $f(t) = 1$ に対して，(*) は $s > 0$ に対して収束し $\hat{f}(s) = 1/s$ となる．

(2)　関数 $f(t) = t$ に対して，(*) は $s > 0$ に対して収束し $\hat{f}(s) = 1/s^2$ となる．

[9] B はローマ文字の b の大文字ではなく，ギリシア文字 β の大文字である．

[10] 一般には s は複素変数と考えるべきだが，ここでは実変数と思うことにする．ラプラス変換は線形常微分方程式を解くのに便利なツールだが，この科目では扱わない．「工業数学」などの名前のついた授業で学ぶはずである．

(3)　関数 $f(t) = t^k$ (k は正の整数) に対して，(*) は $s > 0$ に対して収束し $\hat{f}(s) = k!/s^{k+1}$ となる．

(4)　関数 $f(t) = e^{at}$ (a は定数) に対して，(*) は $s > a$ に対して収束し $\hat{f}(s) = 1/(s-a)$ である．

(5)　関数 $f(t) = \cos\omega t$ (ω は定数) に対して (*) は $s > 0$ に対して収束し，$\hat{f}(s) = s/(s^2+\omega^2)$ である．

(6)　関数 $f(t) = \sin\omega t$ (ω は定数) に対して (*) は $s > 0$ に対して収束し，$\hat{f}(s) = \omega/(s^2+\omega^2)$ である．