14. 広義積分の応用

■ ガウス積分

定理 14.1 (ガウス積分の値).

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{14.1}$$

が成り立つ.

例 13.10, 注意 13.11 からこの広義積分は収束する．しかし e^{-x^2} の原始関数は初等関数の形で表せないことが知られているので，積分の値を求めるには特別なアイディアが必要である．以下，重積分の変数変換の応用として，(14.1) を示す.

定理 14.1 の証明. いま，正の数 M に対して

$$I_M := \int_0^M e^{-x^2}\,dx$$

とおくと，

$$\begin{aligned}(I_M)^2 &= \left(\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^M e^{-y^2}\,dy\right) \\ &= \int_0^M e^{-y^2}\left(\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right)dy = \iint_{E_M} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\end{aligned} \tag{14.2}$$

が成り立つ．ただし

$$E_M := [0,M]\times[0,M]$$

である.

一方，一般に正の実数 R に対して

$$J_R := \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy, \tag{14.3}$$

$$D_R := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq R^2, x\geqq 0, y\geqq 0\}$$

*)2014 年 7 月 23 日

とおくと，極座標 (r,θ) $(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$ により D_R は

$$\widetilde{D}_R := \left\{(r,\theta)\,\middle|\, 0\leqq r\leqq R, 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\} = [0,R]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

に対応するから，ヤコビアン $\partial(x,y)/\partial(r,\theta)=r$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}J_R &= \iint_{\widetilde{D}_R} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R re^{-r^2}\,dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R\left(\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right)'dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\bigl(1-e^{-R^2}\bigr)\end{aligned} \tag{14.4}$$

を得る.

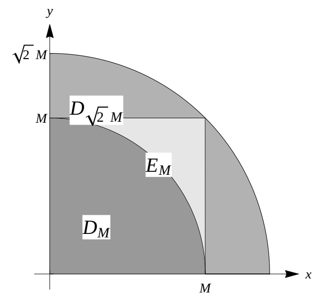

図 14.1　ガウス積分の計算

ここで，与えられた M に対して

$$D_M \subset E_M \subset D_{\sqrt{2}M}$$

が成り立つ（図 14.1 ）から，

$$\int_{D_M} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqq \int_{E_M} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqq \int_{D_{\sqrt{2}M}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

である．式 (14.2), (14.3), (14.4) から，この不等式は

$$\frac{\pi}{4}\bigl(1-e^{-M^2}\bigr) \leqq (I_M)^2 \leqq \frac{\pi}{4}\bigl(1-e^{-2M^2}\bigr),$$

したがって，$M\to+\infty$ とすれば，

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\lim_{M\to+\infty} I_M\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

考えている積分の値は正だから (14.1) が得られた. □

この応用として，ガンマ関数（例 13.12）の半整数における値を求めることができる：

系 14.2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

証明. 定義式の x を u^2 とおくと，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\,dx=2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$$

となるので，定理 14.1 から結論が得られる． □

系 14.3. 定数 μ と正の数 σ に対して次が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx=1, \tag{14.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\mu, \tag{14.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\sigma^2. \tag{14.7}$$

証明. 変数変換 $u=(x-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$ により，(14.5) の広義積分は定理 14.1 の広義積分に帰着できる．実際，正の数 M_1, M_2 に対して

$$\int_{-M_1}^{M_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du$$

となる．ただし

$$a_1=\frac{M_1+\mu}{\sqrt{2}\sigma},\qquad a_2=\frac{M_2-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \tag{14.8}$$

とおいた．ここで $M_j\to+\infty$ と $a_j\to+\infty$ $(j=1,2)$ は同値だから，定理 14.1 から (14.5) が得られる．

おなじ変数変換により，(14.6) の積分を計算する：正の数 M_1, M_2 に対して

$$\begin{aligned}\int_{-M_1}^{M_2}\frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx&=\int_{-a_1}^{a_2}\frac{\sqrt{2}\sigma u+\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}\,du\\&=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{a_1}^{a_2}ue^{-u^2}\,du+\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du\\&=\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{\pi}}\left(e^{-a_1^2}-e^{-a_2^2}\right)+\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du\to\mu\qquad(a_1,a_2\to+\infty)\end{aligned}$$

となり (14.6) を得る．

最後に，

$$\begin{aligned}\int_{-M_1}^{M_2}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx&=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}u^2e^{-u^2}\,du=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}u\left(\frac{-1}{2}e^{-u^2}\right)'\,du\\&=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\left[-ue^{-u^2}\right]_{-a_1}^{a_2}+\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du\right)\end{aligned}$$

となる．右辺の第 1 項は系 13.8 から 0 に収束する．また，第 2 項の積分は定理 14.1 から求まるので，(14.7) を得る． □

注意 14.4. 確率的に値が定まるような変数を**確率変数**という．確率変数が特定の値をとるときの確率が指定されているとき，変数の値と確率の対応を**確率分布**という．

硬貨（いかさまでない）を 10 回投げて表がでた回数を X を確率変数とみなせば，$X=k$ となる確率は ${}_{10}\mathrm{C}_k/2^{10}$ であることは高等学校で学んだ．このような分布を**二項分布**という（ということが高等学校の教科書にもある）．一般に，確率変数 X が値 x_j をとる確率が p_j (>0) ならば，とりうるすべての値 x_j に関する総和は

$$\sum p_j=1$$

となる（何かが起こる確率は 1）．ここで，同じ範囲で和をとって

$$\mu:=\sum p_jx_j,\qquad \sigma^2:=\sum p_j(x_j-\mu)^2$$

とおき μ を X の**平均**，σ^2 を**分散**，σ を**標準偏差**という [1)]．

確率変数が連続的な値をとる場合，この議論はうまく行かない．実際，一般に「特定の値をとる」ということは滅多に起こらない．そこで，確率変数の値が「ある範囲」にある場合の確率を指定し，その指定のしかたを確率分布とする．すなわち，任意の区間 (a,b) に対して $a\leqq X\leqq b$ となる確率 $P_{(a,b)}$ を指定することが確率分布を定めることとする．とくに，この確率が

$$P_{(a,b)}=\int_a^b\rho(x)\,dx\qquad\rho(x)\geqq 0$$

[1)] 確率変数：a stochastic variable, a random variable, 確率分布：a probability distribution, 二項分布：the binomial distribution, 平均：the mean, 分散：the variance, 標準偏差：the standard deviation, 確率密度関数：a probability density function.

と，積分を用いて表されているとき，考えている確率分布の**確率密度関数**は $\rho(x)$ である，という．確率変数の値がどれかの実数になる確率は 1，任意の区間に対して $P_{(a,b)} \geqq 0$ にならなければならないから，密度関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1, \qquad \rho(x) \geqq 0 \tag{14.9}$$

をみたさなければなならない．さきに述べた離散的な場合との類推で，確率密度関数が ρ となるような確率分布に対して，

$$\mu := \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx, \qquad \sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\rho(x)\,dx$$

をそれぞれ平均，分散という．

さて，実数 μ と正の数 σ に対して

$$\rho(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2}\sigma}}$$

とおくと，系 14.3 の式 (14.5) は，ρ が (14.9) をみたしていることを表している．この ρ を確率密度関数にもつような確率分布のことを**正規分布**という[2]．系 14.3 の 14.6, (14.7) は，この正規分布の平均，分散が μ, σ^2 であることを表している．

■ ガンマ関数とベータ関数　ガウス積分に似た方法で，第 13 回の例 13.12, 13.13 であたえたガンマ関数とベータ関数の関係式を導くことができる：

定理 14.5.

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \bigl(p>0, q>0\bigr).$$

証明． 正の数 p, q をとり，固定しておく．正の数 $\varepsilon < 1/4$ と正の数 $M > 1$ に対して

$$\begin{aligned} I(\varepsilon, M) &:= \iint_{D_{\varepsilon,M}} e^{-x}x^{p-1}\,e^{-y}y^{q-1}\,dx\,dy \\ &= \left(\int_{\varepsilon}^{M} e^{-x}x^{p-1}\,dx\right)\left(\int_{\varepsilon}^{M} e^{-y}y^{q-1}\,dy\right) \qquad D_{\varepsilon,M} = [\varepsilon, M]\times[\varepsilon, M] \end{aligned}$$

[2] 正規分布：the normal distribution．正規分布は確率分布の単なる例ではなく，重要な意味をもっている．確率や統計の教科書などで「中心極限定理」を調べてみよ．

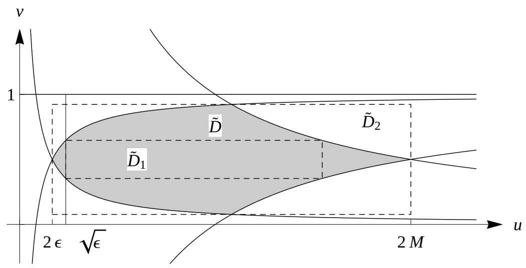

図 14.2　定理 14.5 の証明

とおくと，ガンマ関数の定義（例 13.12）から

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ M\to+\infty}} I(\varepsilon, M) = \Gamma(p)\Gamma(q) \tag{14.10}$$

である．

一方，変数変換

$$x = uv, \qquad y = u(1-v)$$

をほどこすと，xy 平面の部分集合 $D_{\varepsilon,M}$ は uv 平面の部分集合

$$\widetilde{D} := \left\{(u,v)\,\middle|\,\frac{\varepsilon}{u} \leqq v \leqq \frac{M}{u}, 1-\frac{M}{u} \leqq v \leqq 1-\frac{\varepsilon}{u}\right\}$$

と 1 対 1 に対応する（図 14.2）．変数変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -u$$

であるから，$\widetilde{D}$ 上 $u>0$ に注意すれば

$$I(\varepsilon, M) = \iint_{\widetilde{D}} e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,du\,dv$$

となる．

ここで

$$\widetilde{D}_1 := \left[\sqrt{\varepsilon}, \frac{M}{1-\sqrt{\varepsilon}}\right] \times [\sqrt{\varepsilon}, 1-\sqrt{\varepsilon}]$$

$$\widetilde{D}_2 := [2\varepsilon, 2M] \times \left[\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}, \frac{M}{M+\varepsilon}\right]$$

とおくと，図 14.2 のように $\widetilde{D}_1 \subset \widetilde{D} \subset \widetilde{D}_2$ だから，

$$
\begin{aligned}
I(\varepsilon,M) &\leqq \iint_{\widetilde{D}_2} e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,du\,dv\\
&= \left(\int_{2\varepsilon}^{2M} e^{-u}u^{p+q-1}\,du\right)\left(\int_{\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}}^{\frac{M}{M+\varepsilon}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv\right),\\
I(\varepsilon,M) &\geqq \iint_{\widetilde{D}_1} e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,du\,dv\\
&= \left(\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\frac{M}{1-\sqrt{\varepsilon}}} e^{-u}u^{p+q-1}\,du\right)\left(\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1-\sqrt{\varepsilon}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv\right)
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\varepsilon\to+0$, $M\to+\infty$ とすると，2 つの不等式の右辺はともに

$$\Gamma(p+q)B(p,q)$$

に収束するので，結論が得られた． □

■ 高次元の球の体積 ガンマ関数を用いると，高い次元の球の体積を簡単に表すことができる（問題 10-3 参照）．正の整数 n と実数 R に対して $\mathbb{R}^n$ の半径 R の**球**（球体）[3] とは

$$B^n(R) := \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid (x_1)^2+(x_2)^2+\dots+(x_n)^2 \leqq R^2\}\subset\mathbb{R}^n$$

のことで，その体積とは，積分

$$V^n(R) := \int\dots\iint_{B^n(R)} dx_1\,dx_2\dots dx_n$$

のことである．変数変換 $y_j = Rx_j$ $(j=1,\dots,n)$ を行うことにより，

$$V^n(R) = R^n\alpha_n \qquad \alpha_n := V^n(1)$$

であることがわかる．ここで α_n は半径 1 の球体の体積なので，次がわかる：

$$\alpha_2=\pi,\qquad \alpha_3=\frac{4}{3}\pi.$$

定理 14.6.

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

[3] 球：a ball. 表面だけを表すときは**球面** a sphere という語を用いる．

証明. 関数 $f(x_1,\dots,x_n) := e^{-x_1^2-\dots-x_n^2}$ を考えると，

$$\int\dots\iint_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-\dots-x_n^2}\,dx_1\,dx_2\,\dots dx_n = \left(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^n = \sqrt{\pi}^n. \tag{14.11}$$

一方，$r=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ とすると $f=e^{-r^2}$ となるので，r から $r+\Delta r$ の区間で f の積分はおよそ

$$
\begin{aligned}
&f(r)\times(\text{半径 } r \text{ から } r+\Delta r \text{ までの球殻の体積}) = f(r)\bigl(V^n(r+\Delta r)-V^n(r)\bigr)\\
&\quad = f(r)\alpha_n\bigl((r+\Delta r)^n - r^n\bigr) = f(r)\alpha_n\cdot nr^{n-1}\Delta r + (\Delta r)^2(\dots)
\end{aligned}
$$

となる（問題 9-6, 第 11 回の体積密度と質量の関係を参照せよ）．f の $\mathbb{R}^n$ の全体での積分は，この体積の総和だが，Δr^2 の項は，総和をとって $\Delta r\to 0$ としたときに 0 となってしまう項なので [4]，

$$\int\dots\iint_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n = \int_0^\infty n\alpha_n e^{-r^2}r^{n-1}\,dr$$

となる．この右辺の積分は $r^2=u$ と置換することで，ガンマ関数の定義から

$$n\alpha_n\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-u}u^{\frac{n}{2}-1}\,du = \frac{n}{2}\alpha_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \alpha_n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

ここで問題 13-3 を用いた．この式と (14.11) が等しいことから結論が得られる． □

[4] ここでは $r=0$ から $r=+\infty$ までの積分を考えるので，この議論は少し甘い．有限の範囲で積分しておいて極限をとるのが正しいが e^{-r^2} が r が十分大きいときにすごく小さくなることから安全と思うこともできる．