微分積分学第二 B (1)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/

2014.10.08

講義概要

1. **講義** Web **ページ（ミラー）：**
   http://www.official.kotaroy.com/class/2014/calc2/
2. **講義** Web **ページ：**
   http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/
3. OCW:
   http://www.ocw.titech.ac.jp/

更新は上から順番

目標

Fact

前期講義ノート *(4.10)* **式**

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

「素手」で示すこともできるが，その背景にある一般論を学ぶ．

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \qquad (x \to 1)$$

級数の収束，冪級数

目標2

Fact

平面の有界領域 D とその境界を合わせた集合 $\overline{D}$ 上で定義された調和関数 f は，境界で最大値・最小値をとる．

(調和関数)
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

極値問題

Theorem (一変数関数の極値)

点 a の回りで何回でも微分可能な関数 f が

- a **で極値をとる** $\Rightarrow f'(a) = 0.$
- $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0 \Rightarrow a$ **で極小値をとる．**

多変数の場合は？ (cf. **対称行列の固有値問題**)

平均値の定理

Theorem (平均値の定理（定理 1.4）)

閉区間 $[a, b]$ で定義された（一変数）連続関数 f が，開区間 (a, b) では微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

- 意味（絵）
- 証明：存在定理の証明のパターン：「答えをつくる」
- 応用：c の正確な値を使うことはまずない．
  微分学の基本的な事項は平均値の定理から来る：
  - 導関数が恒等的に 0 なら定数（定理 1.7）
  - 連続関数の原始関数は，定数だけの差をのぞいて唯一．
  - ある区間で導関数が正ならその区間で単調増加（定理 1.11）
  - 偏微分可能なら微分可能．
  - C^2 級なら偏微分の順序交換ができる．

平均値の定理

Corollary (系 1.5)

一変数関数 f が a と $a+h$ を含む区間で微分可能であるとする．このとき，

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h \qquad 0 < \theta < 1$$

をみたす θ が少なくとも一つ存在する．

$h < 0$ **の場合も考えている．**

平均値の定理の証明

Theorem (平均値の定理（定理 1.4）)

閉区間 $[a, b]$ で定義された（一変数）連続関数 f が，開区間 (a, b) では微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

Proof.

関数

$$F(x) = f(x) - \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right\}$$

の最大値・最小値を考えればよい． □

平均値の定理の意味

Theorem (平均値の定理（定理 1.4）)

閉区間 $[a, b]$ で定義された（一変数）連続関数 f が，開区間 (a, b) では微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

結論の左辺は，区間全体で関数の変化を「均した」量（平均変化率）

- 工太郎君は，午前 10 時に東名高速道路の東京 IC (東京都世田谷区) を自動車で通過し，346.8Km 先の小牧 IC (愛知県小牧市) に同じ日の午後 1 時についた．彼がスピード違反をした瞬間が存在することを証明しなさい．
- 関数の近似

おしらせ

- **次回は** 10 **月** 10 **日（明後日）**
- **今回は提出物を受け付けません．ご了承ください．**