

微分積分学第一講義資料 3

お知らせ

- 変則的なカレンダーでご迷惑をおかけしました。これから暫くは原則どおりとなります。

前回の補足

- テイラーの定理に現れる式：

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

の最後の項（講義ノートでは $R_{n+1}(h)$ と書かれるもの）が他の項と違う形なのはなぜ，という質問を複数いただきました。(1) まず，テイラーの定理の結論の式は「有限個の項」からなっています。関数を無限級数展開することは，第 4 回で扱いますが，ここで扱っているものはそれとは違います。(2) もし，最後の項が，それまでの項と同じ形だとしたら， $f(a+h)$ は h の多項式になっています。 $x = a+h$ とおけば $f(x)$ は x の $(n+1)$ 次多項式となります。いくつかの例で扱ったように，テイラーの定理は多項式で表されない関数を多項式で近似するのに使われます。最後の項は「多項式で表しきれない部分の誤差」の項なので，それまでの項と違う形になるのが必然です。

- 近似のやり方について：講義では，平均値の定理からの帰結

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad (4 < c < 5)$$

に対して，右辺第 2 項を

$$(*) \quad \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2\sqrt{c}} > \frac{1}{2\sqrt{5}} > \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

と評価し， $2.16 < \sqrt{5} < 2.25$ を導きました。問題 1-2 ではもう少し良い評価を要求しているがどうするのか，というご質問がありました。式 (*) の第一式を用いれば $\sqrt{5} < 9/4$ であることがわかりますから，第二式にこの不等式を用いれば

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} > \frac{1}{2\sqrt{5}} > \frac{1}{2\frac{9}{4}} = \frac{2}{9} > 0.22$$

となるので， $2.22 < \sqrt{5} < 2.25$ となり $\sqrt{5} = 2.2\dots$ であることがわかります。

講義でこの方法を用いなかったのはなぜ，というご質問を複数いただきました。理由は以下の通り：後者の方法では確かに評価が良くなるが，それは \sqrt{x} という関数の特別な性質に依存している。そういうことを知らなくてもある程度は評価できる，ということを説明したかった。演習問題には，もう少しよい評価を要求するものもあります。実際，講義で計算してみた $\tan 0.1$ の近似値はもっと良くできます

ね： $\tan 0.1 = 0.1(1 + \tan^2 c)$ ($0 < c < 0.1$) として、 $\tan 0.1 > 0.1(1 + \tan^2 0) = 0.1$ 、講義では、

$$\tan 0.1 < 0.1(1 + \tan^2 0.1) < 0.1 \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{6}\right) = 0.1 \times \frac{4}{3} < 0.134$$

としましたが、例えば $\pi/6$ のかわりに $\pi/8$ や $\pi/12$ などを用いればもう少し精度があがります。

- 問題 2-7 で $f(x) = \tan^{-1} x$ の高次の導関数を求める必要がある:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^m(k-1)!}{(1+x^2)^k} \left(\sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \binom{k}{2l+1} x^{2l+1} \right) & (k = 2m, m = 1, 2, \dots) \\ \frac{(-1)^m(k-1)!}{(1+x^2)^k} \left(\sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{k}{2l} x^{2l} \right) & (k = 2m+1, m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

である。ただし、負でない整数 s に対して

$$\binom{n}{s} := \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!}$$

は二項係数である。この公式は（答えを知っていれば）数学的帰納法により容易に示すことができる。何も無いところから導くならば

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} \right)$$

と（複素数を用いて）部分分数分解して微分し、2つの項をまとめる際に二項定理を用いればよい。

前回までの訂正

- 講義ノート 10 ページ，補題 2.4 の証明 5 行目以降：

とくに f が c で最大値をとるならば $f(c+h) - f(c) \leq 0$ なので

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leq 0 & (h > 0 \text{ のとき}) \\ \geq 0 & (h < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \Rightarrow$$

となるので、 h を 0 に近づけた時の極限值 $f'(c)$ は 0 でなければならない。

- 講義ノート 11 ページ，下から 3 行目： $f^{(k)}(x) = k!x^{n-k} \Rightarrow f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$
- 講義ノート 12 ページ，脚注 9: $k=0 \Rightarrow j=0$.

とくに f が c で最大値をとるならば、 $|h| < \delta$ をみたく任意の h に対して $f(c+h) - f(c) \leq 0$ なので

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leq 0 & (0 < h < \delta \text{ のとき}) \\ \geq 0 & (-\delta < h < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので、 h を 0 に近づけた時の極限值 $f'(c)$ は 0 でなければならない。

授業に関する御意見

- 前期に比べ、くっと人数が減ってしまいましたが、今後研究をしていくにあたって、この授業での知識は必要と思うので私は取ります！後期もよろしくお願ひします。ちなみに、例年受講割合はこれくらいですか？
山田のコメント： いままで山田がもったクラスでは、登録者は前期も後期もあまり変わりませんでした。このクラスは、登録が少ないのか、出席が少ないのか。
- いままで $2^2 < \sqrt{5}^2 < 3^2 \rightarrow 2.1^2 < \sqrt{5}^2 < 2.4^2 \rightarrow \dots$ とじりじり近づけていくやり方ですか \sqrt{x} の近似値を求められなかったのが、平均値の定理で小さいオーダーの誤差の範囲で近似値が求められてすごかったです。
山田のコメント： ねえ。
- 後期も質問用紙に気合入れて単位とります。 山田のコメント： へえ。
- 後期もがんばってください♡ 山田のコメント： なるべくがんばらないように努力してます。
- 授業はかわらず楽しいです。 山田のコメント： そう？
- 今流行りのイクメンだったんですね。とても驚きました。 山田のコメント： 1/4 世紀前の話です。

質問と回答

質問： テイラーの定理（略） $R_{n+1}(h)$ は微量として無視して大丈夫ですか？

お答え： 考えている関数の形や、 h の大きさによります。ざっくりと無視していい場合もありますが、この授業では、無視しないか、あるいは必要な精度の範囲内で無視できる、ということを示します。

質問： 存在定理を証明するのに別の存在定理が必要で、更にその存在定理を証明するにはまた別の... というお話でしたが、これを繰り返していくと、平均値の定理の証明の場合、どこに行き着くのでしょうか。他の定理の証明でも同じ出発点に辿り着くのですか？

お答え： 第 2 回の講義では「連続関数の最大値・最小値の存在」までいきつきましたね。これを示すには「実数の連続性」(第 5~6 回)が必要。実は数学では「出発点として認めなければいけない命題」があるのですが、この授業では注意するにとどめ、深入りはしません。

質問： 講義ノート 2 回目 p. 10 の補題 2.4 の $h = 0$ に近づけたときの極限值 $f'(c)$ は 0 でなければならないのはなぜですか。

お答え： この状況で $F(h) := (f(c+h) - f(c))/h$ とおきましょう。 f の微分可能性から $h \rightarrow 0$ としたときの F の極限值は存在します。さらに、その極限值は右極限值と左極限值と一致します： $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = \lim_{h \rightarrow +0} F(h) = \lim_{h \rightarrow -0} F(h)$ 。
いま $h > 0$ のとき $F(h) \leq 0$ なので $\lim_{h \rightarrow +0} F(h) \leq 0$ 、とくに $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) \leq 0$ 。左極限值を考えると同様の議論で $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) \geq 0$ 。0 以上、かつ 0 以下の実数は 0 しかないので、 $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = 0$ 。

質問： 平均値の定理を証明するときに $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ ($(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を結んだ直線の式) を用いていましたが、なぜですか。授業では詳しく話していなかったように思えたのですが...

お答え： こう置くとうまく行くから、というのが理由のすべてです(と説明した気がします)。絵を描きましたよね。

質問： $F(x) = f(x) - \left\{ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right\}$ とくのは、証明するのにうまくいくからと言っていましたが、何か他に意味はあるのですか。

お答え： その意味を、絵を描いて説明しましたね。

質問： テイラーの定理において、等式を満たす θ が少なくとも 1 つあるとのことでしたが、 θ が複数ある関数とは一体どのようなものなのでしょうか。

お答え： ロルの定理や平均値の定理では、そのような θ が複数存在するような例をすぐ考えられますね。とくにロルの定理では、考えている区間で複数の極値をもつ関数が例となります。テイラーの定理は平均値の定理(またはロルの定理)の帰結ですから、その証明をよく眺めてみれば、例が作れます。

質問： ロルの定理(略)は平均値の定理からの証明ですか？

お答え： 文の意味がよくわかりませんが、ロルの定理を用いて平均値の定理を示します。第 2 回の講義で説明しました。

質問： 講義資料 p. 6 の $G(x) = \begin{cases} \log x & (x > 0) \\ \log(-x) + 7 & (x < 0) \end{cases}$ のとき、 $G'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ \frac{1}{-x} & (x < 0) \end{cases}$ ($= f(x)$) とならないんですか？つまり $G(x) = \log(-x) + 7$ ($x < 0$) は $f(x) = 1/x$ の原始関数たり得ますかという意味です。

お答え： なりません。 $\log(-x)$ の導関数は $1/x$ です。合成関数の微分公式を正しく使ってください。

質問： $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - x^3 + x^2 - 5x + 2$ を $= 2(x-2)^5 + \dots$ (略) となり、 $f(2.01)$ と $f(2)$ の誤差が...4.51... となっていました。誤差は小数項で 4 を引いた 0.51... ではないかと思いました。

お答え： $f(2.01)$ の「値」と言ったはず。

質問： 平均値の定理はコーシーの平均値の定理の $g(x) = x$ の場合と考えていいですか。お答え： いいです。

質問： マクローリン展開とべき級数展開は同義ですか。お答え： 少し違います。第 4 回くらいで扱います。

質問： 平均値の定理とテイラー展開はつながりがあるのですか？演習ではいきなりテイラー展開から入ったのに講義では平均値の定理から入ったので気になりました。

お答え： 「テイラーの定理」(この講義では「テイラー展開」という言葉と使い分ける。第 4 回参照)の証明に平均値の定理を用いる。また、平均値の定理は、テイラーの定理の $n = 0$ の場合。

質問： 高校で平均値の定理は不等式をつくり、はさみうちの原理によって極値を求めることに主に利用しましたが、大学では平均値の定理をどのようなことに利用するのですか。

お答え： 「極値」を求めるにはさみうちをつかうのですか？高校の問題でそんなのありましたっけ。「極限值」を求めることに使う方が多いのではないですか？さて、定理 1.7, 1.11, テイラーの定理は平均値の定理からの帰結です。

「微分の重要な性質はたいてい平均値の定理からでてくる」と、第 1 回の講義で述べましたね。

質問: $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$ ($0 < \theta < 1$) について、なぜ θh といった形にしているのですか? まとめて $f'(c)h$ ではだめなのですか?

お答え: $a < c < a+h$ と書きたいが、 $h < 0$ のときにはそのように書けません。負の値をもつ h の場合にも使えるようにしたいので、こう書いた(と授業で説明した)。

質問: $R_{n+1}(h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}$ という式があり、その中で θ を使っています。今まで θ はよく角度を表すときに用いていたのですが、この式の中の θ も角度に係るのですか。もしない場合はなぜ θ を用いたのか教えてください。

お答え: 原則として、数学の文脈では「文字」が特別の意味に強く結び付けられていることはないと思ってください。「 θ は角度」というのも、たまたまそういう文脈にあなたが馴染んでいたというだけで、それ以上のものではありません。前期の質問コーナーでも回答で「その文字は何を表すか」と問い返していたと思います。それは「何も言わないと文字の意味がわからないから」です。とはいえ、たとえば ε は小さい正の数、だとか、関数を表すのは f を使うことが多いなど、ゆるく文字と意味が結合している場合があります。このような状況で、慣用と大きく違う使い方をすると「変な人」になりますが、そうであっても文字の意味をその都度説明することをさぼってはいけません。

質問: 定理 2.6 の証明は「証明」のところで与えられた F にロルの定理を用いると書いてありますが、 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ と $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$ の 2 式から出してはだめですか?

お答え: 講義ノートを見ていませんね。問題 2-3 で「それではいけない、その理由を考えよ」といっています。

質問: 第 2 回、問題 2-3 についての質問です。誤りを訂正するために加える条件としては、 $g(a) \neq g(b)$ であれば $g'(c) \neq 0$ が成り立つので、 (a, b) において $g'(x) \neq 0$ の条件はいらなと思うのですが、正しいですか?

お答え: 「 $g(a) \neq g(b)$ であれば $g'(c) \neq 0$ 」は正しくありません。条件を「付け加える」のではなく「この証明が誤りである」ことを指摘してほしいという問題です。

質問: 問題 2-10 で、 $f(x) = 2(\sqrt{x} - \frac{x-1}{2} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{x}}{x-1})$ $a=1, h=2R, n=2$ とおいて式 (2.1) を利用して解こうとしたのですが、うまく解けませんでした。この問題はどうか解けばいいのでしょうか?

お答え: $h=R$ とすると、この値が大きすぎて、テイラーの定理からの近似はうまく行きません。求めたい量は

$$2\left(\sqrt{2R+1} - R \tan^{-1} \frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right) = 2R(x - \tan^{-1} x) \quad \left(x := \frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right)$$

だが、この x は十分に小さい量なので (10^{-3} くらい) テイラーの定理がつかえそうです。講義で少しだけやってみます。

質問: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$ の式から、 x^n の式から $(x-a)^n$ の式にできるのはわかりました。ただ、たとえば $\mathcal{A} = \langle 1, x, \dots, x^n \rangle$, $\mathcal{B} = \langle 1, x-a, \dots, (x-a)^n \rangle$ に基底変換する際の変換行列を求めるやり方がよくわかりません。 \mathcal{B} を \mathcal{A} に変える行列はすぐわかりますが、逆行列がうまくいきません。線形代数の範囲で、授業にあまり関係無いですが、お願いします。

お答え: たかだか n 次の多項式全体の線形空間の基底変換のことですね。たとえば $n=4$ のときは

$$(1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3, (x-a)^4) = (1, x, x^2, x^3, x^4) \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & -4a^3 \\ 0 & 0 & 1 & -3a & 6a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これは二項定理からすぐにわかります(一般に、変換行列の係数は二項係数を用いて表されます)。逆方向の基底変換は、この行列の逆行列ですが、単純に a を $-a$ で置き換えればいいのです。(1) $n=4$ の場合に確かめよ(掛け算をして単位行列となればよい)。(2) n が一般の場合に確かめよ。

質問: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x \sin x} = \frac{3}{2}$ などをテイラーの定理を使って証明するとき、 $\frac{o(x^n)}{x^n} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) を作るために、近似する次数をどのように調節すればいいのでしょうか。

お答え: いくつか試行錯誤をしてみると、仕組みがわかってきます。そこをさぼってはいけません。ところで“ $o(x^n)$ ”の o が大文字に見えました。大文字の O は違う意味を表すことが多いので気をつけてください。

質問: $0! = 1$ になるゆゑはなんなりや?

お答え: $n! = n \times (n-1)!$ が $n=1$ の場合も成り立つようにしたい(と前期に説明しましたね)。