微分積分学第二 B (4)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/

2014.10.29

おしらせ

今回の提出物の締め切りは，都合により

10月30日（木）12:00

とさせていただきます．

質問から

Q: **例えば $0 \leq u \leq 1$ をみたす u について式変形を行うような問題で，範囲をどうおくかあらじめしらないと解けない問題はありますか? また，そのような問題ではどのように対処すればよいですか?**

A: **意味が全くわかりません． 何の範囲でしょう．u の範囲ですか? それならご質問にあるように $0 \leq u \leq 1$ では? 具体的によくわからなかった問題をあげてください．**

Q: **近似の計算で小数を用いて答えを出すとき，先生はもっとも小さいけたの数字が本来の値と一致するように気をつけていました．近似の記号 $\doteqdot$ を使うとき，近似値は実際の値を越えてはいけないのでしょうか?**

A: **真の値を「上と下から」不等式で評価している．**
この講義では $\doteqdot$ は使わない．
たとえば $x = 1/60$ という結果がでたら $x = 0.1666\ldots$ と書かずに $0.166 < x < 0.167$ などと書く．

質問から（ランダウの記号）

Q: Taylor の定理の剰余項について，$\frac{R_{n+1}(h)}{h^{n+1}} \to 0$ が成り立つときのみ，$R_{n+1}(h) = o(h^n)$ と書く，という理解で合ってますか?

A: 合っていません．

Theorem (テイラーの定理 3.1)

$f(x)$ ： a を含む開区間で C^{n+1}-級 $\Rightarrow$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)$$

とおくと $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0.$

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \text{(記号 3.4)}$$

質問から

Q: **授業の最後に解いた例で，**$\arctan x$ **と** $\sin x$ **について** $x = 0$ **でテイラーの定理を用いたとき，**$R(x)/x^5$, $\widetilde{R}(x)/x^5$ **が** $x \to 0$ **のとき** 0 **に近づくということを証明しないで使っていますが，本来であれば証明すべきですよね**?

A: **いいえ．たとえば** $f(x) = \tan^{-1} x$ **にテイラーの定理** 3.1 **を** $n = 5$, $a = 0$, $h = x$ **として適用した（と黒板に書きましたね）ときの剰余項を** $R(x)$ **と書くと，定理** 3.1 **の結論から** $R(x)/x^5 \to 0$ $(x \to 0)$ **が自動的に従います．(定理** 3.1 **を適用して，という部分が，ご質問のことの証明になっているといってもいいでしょう）．**

Q: **板書の方で** $\binom{-1}{0} = 1$ **となっていましたが，**$\binom{-1}{0} = -1$ **ではないのですか**?

A: **いいえ**, $\binom{\alpha}{0} = 1$ **と定めます．**

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k > 0), \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

(講義ノート 29 **ページ)**

テイラー級数への展開

Q: p. 22 の例 3.11 の問題では，定理 3.8 を用いて剰余項を具体的にもとめて計算していますが，この場合 $f(x) = \log(1+x)$ は C^∞-級だから，定理 3.1 の形を用いた方が簡単にもとめられそうです．定理 3.1 の形ではなく，定理 3.8 の剰余項の表し方を使った方がよい場合というのがどんなケースか教えてほしいです．

A: "C^∞-級だから，定理 3.1 を用いた方が求めやすい" というのは本当？
この場合，定理 2.9 の剰余項の形を用いても結論が導けます（やってみて下さい）が，定理 3.1 からは導けません．
実際，C^∞-級であることから，$n \to \infty$ としたときの $R_{n+1}(h)$ の極限が 0 になることは結論できません．

テイラーの定理たち

Theorem (テイラーの定理 2.9)

f: a **と** $a+h$ **を含む区間で** $(n+1)$ **回微分可能** $\Rightarrow$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)$$

$$R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0<\theta<1 \quad \text{なる } \theta \text{ が存在}.$$

Theorem (テイラーの定理 3.8)

f: a **と** $a+h$ **を含む区間で** $(n+1)$ **回微分可能** $\Rightarrow$

$$R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+uh)\,du.$$

同じ剰余項の異なる表現

テイラーの定理たち

Theorem (テイラーの定理 3.1)

f: は a を含む開区間で C^{n+1}-級 $\Rightarrow R_{n+1}(h) = o(h^n)\ (h \to 0)$.

- 剰余項の表示ではなく，$h \to 0$ としたときの挙動
- 0 でない h を固定したときに，$R_{n+1}(h) \to 0\ (n \to +\infty)$ は **結論できない**.

例 3.11: 与えられた $x\ (-1 < x \leqq 1)$ に対して

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$

定理 3.1 からはこのことは結論できない.

例 3.11

$f(x) = \log(1+x)$: C^∞-級; $f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k+1}}{(1+x)^k}$;

Theorem (テイラーの定理 2.9)

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)$$

$$R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{なる } \theta \text{ が存在}.$$

$f(x) = \log(1+x)$; $a = 0$; $h = x$:

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

例 3.11

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_{n+1}(x),$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1).$$

- $0 \le x \le 1$ のとき，
$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n\to\infty).$$
- $-1 < x < 0$ のとき，
$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1}$$

このままでは，$n\to\infty$ のときの収束が示せない（評価が甘い）：定理 3.8 を用いる：

例 3.11

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+ux)^{n+1}}\,du \qquad (\textbf{定理}\ 3.8)$$

$|x| < 1$ **のとき**

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| &\leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-u|x|)^{n+1}}\,du \\
&\leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-u)^n(1-u|x|)}\,du \\
&= |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{du}{(1-u|x|)} \\
&= |x|^{n+1} \frac{1}{|x|} \big|\log(1-|x|)\big| \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

質問から

Q: **定理** 3.8 **で，**$R_{n+1}(h) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)dt$ **を** $t = (1-u)a + ux$ **で置換積分するのはなぜですか**?

A: **積分区間を** $[0,1]$ **と決め打ちにするため．**

Q: **第** 3 **回のプリントで新しい剰余項の表し方が出てきましたが，表現のしかたを変えているだけなら，特に使い分ける必要がないと思うのですが，このやり方じゃないとうまく行かないケースはありますか**?

A: **前のページの評価を定理** 2.9 **の形でやってみよ．**