2014 年 10 月 29 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 4

お知らせ

- 申し訳ありませんが，今回の提出物の締め切りを **10 月 30 日（木曜日）正午**とさせてください．

前回の補足

■定理　実数 x $(-1 < x \leqq 1)$ に対して $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}$ が成り立つ．

■証明　$f(x) = \log(1+x)$ とおく．

第一段（テイラーの定理を使うための準備）：　正の整数 k に対して

$$(*) \qquad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

が成り立つ．実際，$k=1$ のとき，$f(1)(x) = \frac{d}{dx}\log(1+x) = 1/(1+x)$ なので $(*)$ が成り立つ．また，$k=m$ のときに $(*)$ が成り立つならば

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(m)}(x) = \frac{d}{dx}\frac{(-1)^{m+1}(m-1)!}{(1+x)^m} = (-m)\frac{(-1)^{m+1}(m-1)!}{(1+x)^{m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}m!}{(1+x)^{m+1}},$$

となり，$k = m+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

第二段（テイラーの定理）：　$x \in (-1, 1]$ を一つ固定しておく．テイラーの定理 2.9 および 3.8 を $f(x) = \log(1+x)$, $a=0$, $h=x$, および任意の正の整数 n として適用すると，

$$(**) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} = (-1)^{n+2}x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+ux)^{n+1}}\,du$$

となる．ただし θ は 0 と 1 の間のある数である．

第三段（剰余項の評価 ($0 \leqq x \leqq 1$ のとき)）：　$x \in [0,1]$ とするとき，$(**)$ の剰余項の最初の形を用いると，$0 < \theta < 1$ に注意すれば

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \leqq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\right) = 0$$

となり，結論の式が得られる．

第四段（剰余項の評価 $(-1 < x < 0$ のとき)）： このときは $(**)$ の剰余項の，積分を含む形を用いると，被積分関数が負でないことに注意すれば次のように結論が得られる：

$$
\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| &= |x|^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+ux)^{n+1}}\,du = |x|^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-u|x|)^{n+1}}\,du \\
&\leqq= |x|^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-u)^n(1-u|x|)}\,du = |x|^{n+1}\frac{-\log(1-|x|)}{|x|} \to 0 \qquad (n\to\infty). \qquad \square
\end{aligned}
$$

前回までの訂正

- 黒板に書いた二項定理の式が間違っていたそうです：
$$(1+x)^k = 1 + kx + \binom{k}{2}x^2 + \dots + \binom{k}{n}x^n \qquad \Rightarrow \qquad (1+x)^k = 1 + kx + \binom{k}{2}x^2 + \dots + \binom{k}{k}x^k$$
- 問題 2-10 を黒板でやってみましたが，結論の式（途中で修正した）の修正が足りなかったようです：
$7.4\times10^{-4}(1-10^{-6}) < y < 7.5\times10^{-3}(1+10^{-6}) \Rightarrow 7.4\times10^{-4}(1-10^{-6}) < y < 7.5\times10^{-4}(1+10^{-6})$.
- 講義ノート 19 ページ，脚注 5：「これは第 5 回に紹介する」を削除.
- 講義ノート 20 ページ，(3.4) 式：$f^{(k)}(a)h^n \to f^{(k)}(a)h^k$
- 講義ノート 23 ページ，問題 3-1 のヒント：$a=\sqrt{2} \to a = 2$
- 講義ノート 25 ページ脚注: 1x0 月 → 10 月

授業に関する御意見

- 今回の授業は計算が多かったです. **山田のコメント：** そうですね.
- 前半はついていけましたが，2-10 の解説あたりからついていくのが困難になりました.
  山田のコメント： 自分でやりなおしてみるとよくわかる.

質問と回答

質問： $f(x) = \tan^{-1}x$ の $f^{(k)}(x) =$ (山田注：講義資料 3，2 ページ 5 行目) の $(-1)^n$ の n は何を表しているのでしょうか．$f(x) = \tan^{-1}x$ として $f^{(k)}(x)$ を二項定理から求めましたが，どうしたら $f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{2}i^{k-1}\left\{\frac{1}{(1-ix)^k} + (-1)^{k-1}\frac{1}{(1+ix)^k}\right\}$ が (*) (山田注：講義資料 3，2 ページの式) と同じ形になるのかがわかりません.

お答え： 前半：$(-1)^m$ です（講義資料参照)．後半：単純に計算すればよいのです：$k=2m$ $(m=1,2,\dots)$ のときは，

$$
\begin{aligned}
\frac{(k-1)!}{2}i^{k-1}\left\{\frac{1}{(1-ix)^k} + (-1)^{k-1}\frac{1}{(1+ix)^k}\right\} &= \frac{(k-1)!}{2}i^{2m-1}\left\{\frac{1}{(1-ix)^k} - \frac{1}{(1+ix)^k}\right\} \\
&= \frac{(k-1)!}{2}(i^2)^m i^{-1}\left\{\frac{1}{(1-ix)^k} - \frac{1}{(1+ix)^k}\right\} \\
&= \frac{(k-1)!}{2}(-1)^m i^{-1}\frac{(1+ix)^k-(1-ix)^k}{(1-ix)^k(1+ix)^k} = \frac{(k-1)!}{2}(-1)^m i^{-1}\frac{(1+ix)^k-(1-ix)^k}{(1+x^2)^k}.
\end{aligned}
$$

ここで，最後の式の分子は，二項定理を用いて

$$(1+ix)^k - (1-ix)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(ix)^j - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(-ix)^j = \sum_{j=0}^k\left(\binom{k}{j}i^j\bigl(1-(-1)^j\bigr)x^j\right)$$

となるが，最後の総和の中身は j が偶数のときは 0 になる．したがって，$j=2l+1$ とおいて（$0 \leqq j \leqq k = 2m$ なので，$l = 0,1,\dots,m-1$ となる）

$$(1+ix)^k - (1-ix)^k = \sum_{l=0}^{m-1}\left(\binom{k}{2l+1}i^{2l+1}2x^{2l+1}\right) = 2i\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\binom{k}{2l+1}x^{2l+1}$$

となり，講義資料 3，2 ページの式の前半が得られたことになる．k が奇数の場合も同様にやればよい.

質問： 定理 3.8 で，$R_{n+1}(h) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)dt$ を $t = (1-u)a + ux$ で置換積分するのはなぜですか?

お答え： 積分区間を $[0,1]$ と決め打ちにするため．

質問： p. 22 の例 3.11 の問題では，定理 3.8 を用いて剰余項を具体的にもとめて計算していますが，この場合 $f(x) = \log(1+x)$ は C^∞-級だから，定理 3.1 の形を用いた方が簡単にもとめられそうです．定理 3.1 の形ではなく，定理 3.8 の剰余項の表し方を使った方がよい場合というのがどんなケースか教えてほしいです．

お答え： “C^∞-級だから，定理 3.1 を用いた方が求めやすい” というのは本当？この場合，定理 2.9 の剰余項の形を用いても結論が導けます（やってみて下さい）が，定理 3.1 からは導けません．実際，C^∞-級であることから，$n \to \infty$ としたときの $R_{n+1}(h)$ の極限が 0 になることは結論できません．

質問： 第 3 回のプリントで新しい剰余項の表し方が出てきましたが，表現のしかたを変えているだけなら，特に使い分ける必要がないと思うのですが，このやり方じゃないとうまく行かないケースはありますか?

お答え： 問題 3-5 は? 定理 2.9 の剰余項の形で「できない」とは言い切れませんが（やってみて報告してください）．

質問： $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)$ これだと，第 1 項目が $n = 0$ になってしまうから（山田注：剰余項の前の項が）$\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)h^{n-1}$ の方がしっくりくると思います．

お答え： よくわからないのですが，どうやっても 1 項目は 0 次の項では?

質問： Taylor の定理の剰余項について，$\frac{R_{n+1}(h)}{h^{n+1}} \to 0$ が成り立つときのみ，$R_{n+1}(h) = o(h^n)$ と書く，という理解で合ってますか?

お答え： **合っていません**．テイラーの定理の剰余項は $R_{n+1}/h^n \to 0$ $(h \to 0)$ を満たすので，ランダウの記号の定義（記号 3.4, 式 (3.2)）から $R_{n+1}(h) = o(h^n)$ $(h \to 0)$ が自動的に成り立ちます．条件は不要です．

質問： 授業の最後に解いた例で，$\arctan x$ と $\sin x$ について $x = 0$ でテイラーの定理を用いたとき，$R(x)/x^5$, $\widetilde{R}(x)/x^5$ が $x \to 0$ のとき 0 に近づくということを証明しないで使っていますが，本来であれば証明すべきですよね?

お答え： いいえ．たとえば $f(x) = \tan^{-1} x$ にテイラーの定理 3.1 を $n = 5$, $a = 0$, $h = x$ として適用した（と黒板に書きましたね）ときの剰余項を $R(x)$ と書くと，定理 3.1 の結論から $R(x)/x^5 \to 0$ $(x \to 0)$ が自動的に従います．（定理 3.1 を適用して，という部分が，ご質問のことの証明になっているといってもいいでしょう）．

質問： (1) $\frac{R_{n+1}(h)}{h^n} \to 0$ $(h \to 0)$ はいつも成り立つのですか? (2) そのときに，なぜ $R_{n+1}(h)$ を $O(h^n)$ とかくのかよく分かりません（山田注：原文ママ．大文字の O ではなく小文字の o です，と授業中に注意したはず）．R_{n+1} の表記では $(n+1)$ を使って表しているのに，$O(h^n)$ のときはなぜ n を用いているのですか．(3) また $o(h^n)$ の表記にすると，例としてやった $\frac{3\tan^{-1} x - 3x + x^3}{6\sin x - 6x + x^3}$ の極限を求めるときに途中式で $R(x)/x^5$ とした部分は $o(x^5)/x^5$ となるのですか? 分母をかかずに $o(x^5)$ だけでないのですか?

お答え： (1) 設定はなんでしょう．これだけではわかりません．状況を明確にすると定理 3.1 になります．(2) $o(*)$ の定義を見て下さい（注意 3.4, (3.2) 式）．$R_{n+1}(h)/h^n \to 0$ となることをこのように書くという約束です．(3) 分母を書かないとランダウの記号と違った使い方になります．定義に忠実に記号を使いなさい．自己流の自分勝手な解釈はしてはいけない．

質問： 近似の計算で小数を用いて答えを出すとき，先生はもっとも小さいけたの数字が本来の値と一致するように気をつけていました．近似の記号 $\fallingdotseq$ を使うとき，近似値は実際の値を越えてはいけないのでしょうか?

お答え： 真の値を「上と下から」不等式で評価しているはずで，真の値を超えている数もでてきていますよね．少々マニアックですが，この講義では $\fallingdotseq$ は使いません．不等式でがちがちと評価します．たとえば $x = 1/60$ なら，$x = 0.1666\ldots$ と書かずに $0.166 < x < 0.167$ (桁数は考えている問題による) と書くことにしています．

質問： 授業で扱った「問題 2-10」を解く際，近似を行う場面で，「10^{-6} は 1 に比べてとても小さいからいい加減に評価してよい」とおっしゃっていましたが，その “いいかげん” に評価できるオーダーとはどれくらいでしょうか? (1 と 10^{-2}, 1 と 10^{-3} あたりとか. . . ）その問題で求められているオーダーによるとは思いますが，ある程度の基準があれば教えていただきたいです．

お答え： 天から与えられる基準なんてありません．求めたい値と桁違いに小さければよいわけですが，いい加減に評価してほしいだけの精度がでなかったなら，もとに戻って評価しなおせばよいだけです．

質問： p 18 の例 3.3 のように $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + R_3(x)$, $\lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^2} = 0$ を適用して極限を考えていて，剰余項の値が十分小さいとしていますが，テイラー展開は近似であると考えてよいですか．

お答え： この授業では（次回説明しますが）「テイラーの定理」と「テイラー展開」を別の意味で使います．ここでは「テイラーの定理」の意味ですね．十分小さいとしている，のではなく「x が小さいときは，剰余項は他の項に比べて十分小さい」，という意味で剰余項をのぞいた部分が近似となっています．

質問： 問題 3-4 の最初の問題，定数関数 1 に対して $f(x) = o(1)$ $(x \to a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0$ がわかりません．$\lim_{x\to a} f(x) = 1$ だと思うのですが.

お答え： どうしてそう思うのかわかりません．ランダウの記号 o の定義（記号 3.4 の (3.2) 式）の $g(x) = 1$ (定数関数) のときなので，そのまま条件をコピーすればいいだけなのですが.

質問： 注意 3.6 で $x^2 = o(x)$, $x^3 = o(x)$ としていますが，x^2, x^3 は違う値なので，どちらかを $o(x)$，もう一方を違う文字で置くべきではないのでしょうか．$x \to 0$ ならほとんどかわらないから同じ $o(x)$ として表してもいいということですか?

お答え： したがって $f(x) = o(x)$ という式は本来の意味での等式ではないので気をつけよ，と講義で説明しましたよね．「$f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$」という文の意味は記号 3.4 の (3.2) 式のことである，というだけです.

質問： 極限値を出すときに，$o(x^n)$ を使いますが，同じ記号だけれども同じ値ではない $o(x^n)$ がたくさん出てきてやりにくいのですが，うまいやり方はありませんか.

お答え： もともとは何だったかを常に考えればよい．ちなみにこの講義では，積極的に $o(*)$ を使うことはしません.

質問： 前回の授業で Taylor の定理を使うとき，(略) $\lim_{h\to 0} \dfrac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0$ と書いていましたが $o(h^n)$ を使った方が楽なのではないでしょうか．$R_{n+1}(h)$ という書き方を使うメリットは何かあるんですか.

お答え： どちらでもいいですよ．なるべく違うものに違う文字をあてがいたかったので，講義でやった例題では，剰余項を表す文字も関数ごとに変えていましたね.

質問： ランダウの記号の「o」はアルファベットの「o」と同じですか． **お答え：**同じです.

質問： ランダウの記号の大文字の O の定義がわかりません.

お答え： この授業では扱いません（と講義でのべた）が，一応定義だけ：$f(x) = O(g(x))$ $(x \to a)$ とは，a を含むある開区間 I から a を除いた集合 I' 上で $|f(x)/g(x)|$ が有界．有界の意味は第 5 回.

質問： 板書の方で $\binom{-1}{0} = 1$ となっていましたが，$\binom{-1}{0} = -1$ ではないのですか?

お答え： **いいえ**, $\binom{\alpha}{0} = 1$ と定めます．講義ノート 29 ページ.

質問： $\binom{k}{l}$ という形はベクトルと同様の形であり見分けにくいのですが，もし，この形とベクトルを同時に使うときはどうするのですか．やはり ${}_k\mathrm{C}_l$ にするのですか.

お答え： $\binom{k}{l}$ と書き続けている文脈であれば，「これは二項係数を表す」など，言葉を補足するのがよいかと思います.

質問： 二項係数の書き方で $\binom{h}{n} = \frac{h(h-1)\dots(h-n+1)}{n!}$ の方が多数派と言っていましたが，なぜ高校ではいまだに ${}_h\mathrm{C}_n = \frac{h!}{n!(h-n)!}$ という書き方にするのか? なぜ大学では $\binom{h}{n}$ の方が多数派なのか?

お答え： まず「大学で多数派」なのではなく「世界で多数派」です．講義では「大学では」などとは言っていないはず．質問の意味がわからないのですが，(1) 記号 ${}_h\mathrm{C}_n$ vs $\binom{h}{n}$ なのか (2) 定義式 $\frac{h(h-1)\dots(h-n+1)}{n!}$ vs $\frac{h!}{m!(h-m)!}$ なのか，どちらを聞いているのでしょう．(2) については $\binom{h}{n}$ は h が正の整数でなくても前者には意味があるので一般には前者を用いる．(1) については単なる習慣の問題.

質問： $\max\{a, b\}$ は a と b の小さくない方を表すとありますが，$\max\{a, b, c\}$ となる場合はどのようになるのですか?（原文ママ：「$\max\{a, b, c\}$ となる場合」は「$\max\{a, b, c\}$ の場合」のことか．前者だとなにが「となる」のかわからない.） **お答え：**$\max\{a, b, c\} = \max\{\max\{a, b\}, c\}$ でどうですか?

質問： $\lim_{h\to +0} \dfrac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{u\to +\infty} ue^{-u}$ の h と u の変換の仕方がわかりません． **お答え：**$u = 1/h$.

質問： 定理 3.1 の証明において $I' = [a - \delta, a + \delta]$ となるのでは?

お答え： いいえ，それでは I' は I に含まれないでしょう.

質問： テイラー級数の形はすべて覚えたほうがよいか? **お答え：**すべてとは?

質問： プリント p. 27 の定義 4.4 で「解析関数は C^∞-級であるが逆は成立しない」とあるのですが，逆が成立しないような具体的な関数は何がありますか? **お答え：**例 4.5.

質問： 定規 3.1（原文ママ：定理 3.1 のことか) のとき，$\lim_{x\to 0} \dfrac{R(x)}{x^5} = 0$ としましたが，$\lim_{x\to 0} \dfrac{R(x)}{x^n} = 0$ としたとき n はどれくらいの値に設定すればよいですか?

お答え： ご質問の意味が全くわかりません．定理 3.1 自体は x^5 で割るなどとはいっていませんよね.

質問： 例えば $0 \leqq u \leqq 1$ をみたす u について式変形を行うような問題で，範囲をどうおくかあらじめしらないと解けない問題はありますか? また，そのような問題ではどのように対処すればよいですか?

お答え： 意味が全くわかりません．何の範囲でしょう．u の範囲ですか? それならご質問にあるように $0 \leqq u \leqq 1$ では? 具体的によくわからなかった問題をあげてください.