

微分積分学第一講義資料 5

お知らせ

- 次回11月12日の12時15分より防災訓練があります。一緒に逃げましょう。

前回までの訂正

- ことばの使い方がすこしおかしかったようです：

– 関数 $f(x)$ が a で何回でも微分可能で

– 0 を含む開区間 I が存在して、任意の $h \in I$ に対して $f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n$

が成り立つとき、 f は a で「テイラー展開可能」または「実解析的」という。(講義では「 a のまわりでテイラー展開可能、 a で実解析的」とわけて使いましたが、「 a でテイラー展開可能」と言うべきと思いました。実際「 a のまわりで」とすると、 a の近くの値を中心としてテイラー展開できるように読めますが、ここでは中心を a でしか考えていないので不適当と思います)。また、ここで現れた等式を「 a のまわりのテイラー展開」ということにします。これは、この等式が a で成り立つだけでなく $a+h$ (a のまわりの数) でも成り立つことによります。

- 黒板に書いた式：

$$\log(1+x) - \left\{ x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^n \right\} = R_{n+1}(x) \rightarrow 0$$

と書いたようです。{ } 内の最後の項の分母は n です。

- 講義ノート 29 ページ，一番下： $\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{16} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{16}$
- 講義ノート 39 ページ，9 行目：

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} h + \cdots + \binom{n}{n} h^n \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} h + \cdots + \binom{n}{n} h^n$$

授業に関する御意見

- 無限の数列の和が簡単な式で表せてしまうのって素敵ですね。山田のコメント：ね。
- (^o^) ホモォー (^o^) -シャカシャカー--- (^o^) -シャカシャカシキシキ 山田のコメント：はい。

質問と回答

質問： $f(x) =$ (略，例 4.5 の関数) は，板書では「 $x=0$ のまわりで Taylor 展開可能でない」とあり，講義ノート p. 29 では「 0 で解析的でない」とあります。「 $x=0$ のまわり」というのと「 0 で」というのは同じ意味なのでしょうか？ 教えて下さい。

お答え：「前回までの訂正」の最初の項目参照。

質問： 講義ノート p. 30, 補題 4.11 について，テーラー展開を使って得られた式に，ランダウの記号が残っていても良いのでしょうか？

お答え： よく読んでください。ここではテイラー展開なんてしていません。「テイラーの定理の系 3.7 を用いて」と書いてありませんか。系 3.7 の結論はなんですか？

質問： マクローリン展開ができればテイラー展開はできますか？

お答え： もちろん 0 でテイラー展開できます。0 でのテイラー展開のことをマクローリン展開という（講義ノート 29 ページ）。

質問： テイラー級数とテイラーの定理は、それぞれ異なる表現で、べき関数（山田注：多項式のことか？）でない関数をべき関数で表していると思います。この 2 つをつなぐのが、剰余項を積分の形で表す方法と解釈するのはたしだいでしょうか？それから、テイラー級数とテイラーの定理はどちらが先に発見されたのでしょうか？

お答え： 前半：その解釈は間違っています。(1)「べき関数」という言葉がおかしい。べき関数は x^α の形の関数。ここでは「多項式」と呼ぶのが正しいと思う。ひょっとして「べき級数」を考えているのかもしれないが、べき級数で表せない関数をべき級数で表すということがそもそもおかしい。(2) テイラー級数は多項式で表すのではなく、べき級数で表している。テイラーの定理は多項式でない関数を多項式で近似する定理、テイラー級数は、与えられた関数をべき級数で（近似でなく）表す定理。(3) テイラーの定理をつかってテイラー級数に展開できることを示すときに、次数をあげたときの剰余項の極限が 0 となることを示さなければならない。講義ノートに挙げた例題では、そのためにたまたま積分剰余項の形を用いたが、積分で表すことが本質ではなく、どんな表現でも極限が求まればよい。後半：なんとも言えませんが、ニュートンは一般化された二項定理を知っていたようです。これはテイラー級数の特別な場合ですね。この授業で扱っているテイラーの定理について、剰余項をきちんと表すという考えは、あるていど極限の厳密な扱いが整備されたあとだと思います。

質問： テイラー展開可能な C^∞ -級を「実解析的」と説明されていましたが、これは「 C^ω -級」と書くのでしょうか。それとも、単に「 C^ω 」とか「 C^ω 関数」などと書くのでしょうか。

お答え： 正式なのは「 C^ω -級」 “of class C^ω ” ですが、「 C^ω 関数」 “ C^ω -function” もよく使います。

質問： $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ の両辺を積分することは可能ですか？ また、可能な場合、積分定数はどうなりますか？

お答え： 「積分して等しい」という定理が成り立ちます（項別積分定理、年明けくらいにやる）。このとき、積分は「定積分」として扱います。この授業では、積分定数がでてくる「原始関数」（不定積分とならったかもしれない）は、積分計算の補助として使うにとどめることにします。

質問： テイラー展開できる関数というのは、 C^∞ -級で、かつテイラーの定理での $R_n(h) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ が成立する関数ということでしょうか？ また、複素変数の関数の解析性は実数の関数とどこが違うんですか？

お答え： 前半：はい。後半：ほとんど同じ。定義は、複素変数の意味でテイラー展開可能。実解析的関数 f に対して、複素解析的関数 F で、 x が実数のときには $F(x) = f(x)$ となるものが存在します。

質問： Taylor 展開可能でない関数の話（例 4.5）で $x > 0$ で $f(x) = e^{-1/x}$ を n 階微分の項 ($f(x) = f'(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) + R_{n+1}$) まで展開してから $n \rightarrow \infty$ にして $R_{n+1} \rightarrow 0$ にならないから、Taylor 展開不可能という説明でしたが、 $f(x) = e^{-1/x}$ と定義されているのは $x > 0$ のハニイであるから、 $f(x) = f'(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) + R_{n+1}$ とかけると ($x > 0$ の範囲で) していることが腑におちません。私が極限の考え方をまだわかっていないのなら、全力で謝るので、わかっていないところを教えてください。

お答え： 最後の一文は不要。わかっていないからといって謝る必要はないのでは？まず $f(x) = f'(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) + R_{n+1}$ は $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_{n+1}$ ですね。この上で、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_{n+1}(x)$$

と書く。($R_{n+1}(x)$ はテイラーの定理 2.9 の剰余項だが、その形はいまは必要ない)。すると、 $f^{(k)}(0) = 0$ ($k = 0, 1, \dots$) なので、各番号 n に対して

$$R_{n+1}(x) = f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と表される。

ここで f が 0 で実解析的であるための必要十分条件は、0 を含む開区間 I が存在して、 I の各点 x に対して $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことである。原点を含む開区間 I は正の実数 x を含むが、 $x > 0$ のとき

$$R_{n+1}(x) = f(x) = e^{-1/x} \rightarrow e^{-1/x} > 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるので、 f は実解析的でない。

質問: $\tan^{-1} x$ の Taylor 展開において, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ ($-1 < x < 1$) を積分して $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ ($-1 < x < 1$) とすることができそうですが, 今回説明があったのは

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

であり, x の範囲が合いません. 上のような $\tan^{-1} x$ の展開をすることは意味がないのでしょうか?

お答え: 最後の文の意味がわからない. 区間が合わなければ「意味がない」んでしょうか. まず, $1/(1+x^2)$ の展開とは独立に $\tan^{-1} x$ の展開式は $-1 \leq x \leq 1$ で成り立ちます (特に $x = \pm 1$ のときは問題 3-5). とくに $-1 < x < 1$ の部分では $1/(1+x^2)$ の展開式を形式的に積分したものがたまたま $\tan^{-1} x$ の展開式に一致している (一般論では, 項別積分定理, 1 月くらいにやります) ということです. $\tan^{-1} x$ の展開式の方は, 収束する範囲がちょっと広くて $x = \pm 1$ でも収束するのですが, 一般論として等式がここまで延長されることはアーベルの定理 (1 月に説明する) によります.

質問: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ が成り立つ x の範囲が $(-\infty, \infty)$ となる α の値はどのようなものであるか.

お答え: 負でない整数.

質問: ランダウの o 記号について $f(x) = o(g(x))$ と書きますが $o(\cdot)$ は一種の関数と言っていいですか?

お答え: よくありません. 関数 $f(\cdot)$ は括弧の中の値によって, 値がきまるものですが, ランダウの記号はそうはなっていませんね. $\sin x = o(x)$, $\tan x = o(x)$ ($x \rightarrow 0$) ですが, 同じ x に対して, 最初の $o(x)$ と後の $o(x)$ は値が違います. (したがって, ランダウの記号はあまりよい記号ではないが, なれると便利である, と授業ではいったはずです).

質問: 講義ノート 30 (原文ママ: 30 ページのことか) $o(\cdot)$ の \cdot は何を表しているのですか?

お答え: 「何か」, 「 o はランダウの記号」というのもよいのですが, 「 o (なんちゃら) はランダウの記号」と言う方が自然な気がします. でも「なんちゃら」というのは恥ずかしいので “.” と書いたのです.

質問: p. 26 の (4.5) で, $|R_{n+1}| \leq h^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1-hu}\right)^n \frac{du}{1-hu} = h^{n+1} \int_0^1 \frac{s^n}{1-hs} ds$ 途ありますが, なぜ $s = \frac{1-u}{1-hu}$ と変数変換をするのですか?

お答え: べき乗をする関数の形を簡単にすると積分の見通しがよくなるから.

質問: プリント p. 26 で $h^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1-hu}\right)^n \frac{du}{1-hu} = h^{n+1} \int_0^1 \frac{s^n}{1-hs} ds$ という等式があるのですが, 式変形の結果がうまく合わない気がするので, 式変形の仕方をおしえてください.

お答え: $s = (1-u)/(1-hu)$ とおいて置換積分をする. $u = 0$ のとき $s = 1$, $u = 1$ のとき $s = 0$, $ds = \frac{h-1}{(1-hu)^2} du$, $u = (1-s)/(1-hs)$ に注意せよ.

質問: ノートの $\log(1+x)$ のテイラー展開の, $-1 \leq x \leq 0$ (原文ママ: $-1 < x < 0$ としたはず. とくに $x = -1$ のときは $\log(1+x)$ は意味がない) のときはさみうちで, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-\theta|x|)^{n+1}} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)^{n+1}}$ とはさんだのはなぜですか? $0 \leq x \leq 1$ のときと同様に $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1)} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$ ($\theta|x|$ が小さいと考えて) ではさみうちはいけなかったのですか? こうすれば $0 \leq x \leq 1$ と同様にできる気がします.

お答え: $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1)} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\theta|x|)^{n+1}}$ ですので, 不等号の向きが逆. すなわち「はさめません」. 「 $\theta|x|$ が小さいと考えて」という言い訳が入っていますが, それを具体的にどう式変形に組み入れるかがわかりません. (1) 条件は $|x| < 1$, $0 < \theta < 1$ だけなので, $\theta|x|$ が小さいとは結論できないでしょう. (2) $\theta|x|$ が小さいとんで不等式の向きが逆にできるのでしよう.

質問: 補題 4.14 の $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ は今回のテイラーの定理を適用せずに証明していますが, 第 4 階の授業のテーマであるテイラーの定理とどのような関係が補題 4.14 にはあるのでしょうか.

お答え: 25 ページの下から 5 行目で使っている.

質問: 授業のはじめに言ってた話で, $x = 1.666\dots$ でなく, $1.66 < x < 1.67$ と書くと言っていましたが, $x = 1.6$ よりも $1.66 < x < 1.67$ の方が一般的には主なのですか?

お答え: 一般的というのがわかりませんが, この授業では不等式を使うことにしたいと思います. とくに何かの近似値を小数で求めるなら, それが「電卓で表示できる」値にしたいくないですか?

質問: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ の証明をする際, $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n$ を計算するというのが思いつきません. どうやって思いつくんですか. また, $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \sqrt{2}\sqrt{n} + (n-1) \geq n$ から $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ にもっていきやり方がわかりません.

お答え: 前半: $n \leq (1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}})^n$ に近づくと n としたいなあ, と思って試行錯誤をやってみると結構簡単にみつかりますが,

思いつかなくてよいです。これを思いつくところが証明のキーなので、ここではちゃんと証明を書いたわけです。
後半：両辺の n 乗根をとればよい。これはできなきゃだめ、なので、証明のなかでもきちんと書いていない。

質問： p. 24 (原文ママ：34 のことか?) 定義 5.2 について、任意の正の実数 ε ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ というのは $|a_n - \alpha| = 0$ ということになるんじゃないですか?

お答え： 写すならちゃんと写しましょう。「任意の正の実数 ε ならば」は何を言っているのでしょうか。

質問：「 $f(x)$ のテイラー級数をもとめろ」という問題は、 $f(x)$ の 3 階微分の項くらいまで求めれば解決するものですか?

お答え： 意味がわかりません。「解決する」ってどういうことですか? 「テイラー級数を求める」問題を解決するなら、テイラー級数 (無限級数) を求める必要がないですか?

質問： テイラー級数のとき $n = 3$ などで近似するとき \doteq ではなく $=$ を使っていいのですか?

お答え：「本当に等しい」ところでは $=$ を使ってよいです。そうでないところではだめ。今回したのは、 \doteq を使いたいところで、ぐっとこらえて不等号 \leq, \geq をつかってみよう、という話です。

質問： 板書で $\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-u|x|)^{n+1}} du \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-u)^n(1-u|x|)} du$ と書いていて、こう書くのはうまくいくからと言っていましたが、このように、付等号 (原文ママ：不等号?) をつけて解く問題はあらかじめうまくいく方法を知らないと解けませんか?

お答え： いいえ、何回か試行錯誤をすれば解けると思います。

質問：「特異点を持つために、テイラー級数で表せない関数がある」と参考書でよみましたが、どういうことですか?

お答え： 文脈がわからないのでお答えできません。すくなくとも参考書とその記述の箇所が特定できる情報くらいは書くべきでは?

質問： テイラー級数は生活でどのように利用するのですか? (^ o ^) ホモオー

お答え： だれの生活ですか? 山田は毎日のように使っていますが。