微分積分学第二 B (6)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/

2014.11.12

おしらせ

本日授業終了後

防災訓練

があります

指示にしたがって

避難してください

質問

Q: **無限大の記号 ∞ はどの辺が無限大を表しているのでしょうか?**

A: **検索するとローマ数字の 1,000，ウロボロス等が出てきますが，確実には解らないのではないでしょうか．**

Q: **物理や化学の実験で，得た数値の自然対数をとると，規則性がみつかることがよくある気がします．**
$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ **は何者ですか?**

A: **前半：常用対数でも同じ．2 つの量 x, y が $y = Aa^x$ のような関係にあるとき $\log y$ は x の 1 次関数になるのが鍵．このとき，対数の底を変えても係数が変わるだけで，1 次関数であることは変わらないので，e が特別な役割をしているわけではありません．**
e の役割はもうすこし別のところにあって，$f(x) = \log_a(x)$ の $x = 0$ における微分係数が 1 となるような唯一の底 a の値だったわけです．

質問

Q: 「無限小数は実数を表す」の話で「$a_n = \sum_{k=1}^{n} p_k/10^k$ が単調非減少で上に有界 (*)」なのはわかるのですが，これがなぜ「無限小数は実数を表す」となるのか分かりません.「各項が実数で，上に有界，単調非減少数列」ならば「収束する」という公理から (*) は「a_n は各項実数」となるのですか?

A: 各項実数はあたりまえ．$\{a_n\}$ は収束するので，その極限値を「無限小数が表す実数」とするのです.

Q: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が収束する理由がよくわからなかったです.

A: 問題 5-8．問題にほとんど答えがある.

質問

Q: **実数の連続性の公理は有理数の範囲では正しくない（注 5-15）とのことですが，有理数と無理数の境目がわからなくなりました．$0.1001000100001\ldots$ のように無限ケタまで，各ケタの数を指定した数は有理数ではないのでしょうか? （有限ケタであれば有理数?）**

A: **高等学校で学んだように有理数は 循環小数 で表される．この例は循環小数でないので，有理数ではない．**

質問

Q: **プリントの** 6.5 **を否定して** 6.6 **を導き出しているのですが，** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ **という条件は同じでいいのですか**?

A: (A) **【原型】**
a **に収束する任意の数列** $\{a_n\}$ **に対して，**
$\{f(a_n)\}$ **は** α **に収束する**

(B) **【原型の言い換え】**
任意の数列 $\{a_n\}$ **に対して，**
"$\{a_n\}$ **が** a **に収束する**" **ならば** "$\{f(a_n)\}$ **は** α **に収束**"

(C) **【原型の否定】**
数列 $\{a_n\}$ **で，次を満たすものが存在する：**
["$\{a_n\}$ **が** a **に収束**" **ならば** "$\{f(a_n)\}$ **は** α **に収束**"] **でない**

(D) **【原型の否定の言い換え】**
数列 $\{a_n\}$ **で，次を満たすものが存在する：**
["$\{a_n\}$ **が** a **に収束する**" **かつ** "$\{f(a_n)\}$ **は** α **に収束しない**"]