2014 年 11 月 12 日 (2014 年 11 月 12 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 6

前回までの訂正

- 講義ノート 46 ページ，下から 9 行目：「全称命題は... “or” ...」⇒「特称命題は... “or” ...」

授業に関する御意見

- 寄り目のふくろうは，先生の私物（ペット？）ですか? /ふくろうのういぐるみは先生の私物ですか? 学校の備品ですか?
  山田のコメント： 私物.
- 次回分の授業の予習の質問をすることは OK なのですか？ **山田のコメント：** OK です.

質問と回答

質問： 授業ノート 1/4（原文ママ，なんのことか） 補題 5.5 (1) 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，次をみたす実数 M が存在する：任意の番号 n に対して $|a_n| \leqq M$，のような問題に対しては，具体的に存在する実数を解答しなければいけないのですか?

お答え： 一般の数列なので，$M=5$ などと具体的には与えられない．$\{a_n\}$ から M を求める手段を与えればよい.

質問： 例題 5.5 (3) の $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ の証明で $\frac{1}{\varepsilon} < a_n$ のように $\frac{1}{\varepsilon}$ としているのは，$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ が結論になることがあらかじめわかっているので $\frac{1}{\varepsilon}$ をとってくれば $\left|\frac{1}{a_n}\right| < 1/(1/\varepsilon) = \varepsilon$ となり示せるということでよろしいですか. **お答え：**よいです．黒板の説明で，脇の方に「メモ」として書いた部分.

質問： 「無限小数は実数を表す」の話で「$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k/10^k$ が単調非減少で上に有界 (*)」なのはわかるのですが，これがなぜ「無限小数は実数を表す」となるのか分かりません.「各項が実数で，上に有界，単調非減少数列」ならば「収束する」という公理から (*) は「a_n は各項実数」となるのですか?

お答え： 各項実数はあたりまえ．$\{a_n\}$ は収束するので，その極限値を「無限小数が表す実数」とするのです.

質問： 問題 5-5 で最終的に $\left|\frac{a_1+\dots+a_n}{n} - \alpha\right| < \varepsilon$ を示したいと思ったのですが，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ を利用して，$\frac{\alpha-\varepsilon}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{\alpha+\varepsilon}{n}$ を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha-\varepsilon}{k} < \frac{a_1+\dots+a_n}{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha+\varepsilon}{n}$ として $\left|\frac{a_1+\dots+a_n}{n} - \alpha\right| < \varepsilon$ にもっていく方向性で良いのでしょうか．これははじめに $\{a_n\}$ が収束することがわかっているので，最初にとる実数はこちらが勝手に選んでいいというやつですか?

お答え： この論法では正しい証明はできません．実際，$\{a_n\}$ が α に収束することから $|a_n-\alpha| < \varepsilon$ となることを使うようですが，これが成り立つのは (ε に応じてきまる) 番号 N から後であるはずなのに，質問の式では $|a_1-\alpha| < \varepsilon$ を使っていますね．すなわち「成り立つはずのないものを使っている」ので誤りです．また，最初の行の ε は「$\{(a_1+\dots+a_n)/n\}$ が収束する」ことを示すための ε ですから，あなたに選ぶ権利はありません.

質問： 数列 $\{a_n\}$ が α に，$\{b_n\}$ が β に収束するとき ($n\to\infty$ で) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\alpha}{\beta}$ ただし $\beta \neq 0$ と仮定するとありますが，$\beta = 0$ つまり $b_n \to 0$ のとき，$\alpha \neq 0, \pm\infty$ ならば，$\frac{a_n}{b_n} \to \pm\infty$ になるのですか?

お答え： $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n/n$ とすると $a_n \to 1$, $b_n \to 0$ ですが，$\{a_n/b_n\}$ は正の無限大にも負の無限大にも発散しません．$\{|a_n/b_n|\}$ は正の無限大に発散します．一般に $\{a_n\}$ が 0 でない数に収束し，$\{b_n\}$ が 0 に収束するならば $\lim_{n\to\infty} |a_n/b_n| = +\infty$ であることが示せます.

質問： 「数列 $\{a_n\}$ がある値に収束するならば，その数列は上に有界，または下に有界，または有界のいずれかになる」自分でふと思ったのですが，これは正しいのでしょうか?

お答え： 正しいですが「上にだけ有界」や「下にだけ有界」なものはありません.「収束する数列は有界」．補題 5.5 (1).

質問： 講義ノート P38 で，補題 5.19 について，下に有界でない単調非増加数列は負の無限大に発散するということも成立しますか? **お答え：**はい．証明してごらんなさい．

質問： 単調非減少関数は正の向きに発散する関数と同じでしょうか?

お答え： 「正の向きに発散する関数」の意味を推量すると，$f(x) = \tan^{-1} x$ が反例になると思います．

質問： 単調非減少ならば単調増加であると演習の講義（原文ママ）で言っていたのですが，この授業では，それは成り立たないとおっしゃていました．どちらが正しいのですか？教える人によって違うのでしょうか．

お答え： 文脈によって定義が違うことはある．気になったら「この文脈では単調非減少の定義は何か」を問うべき．

質問： プリントの 6.5 を否定して 6.6 を導き出しているのですが，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ という条件は同じでいいのですか?

お答え： 条件 (A)「a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ に対して，$\{f(a_n)\}$ は α に収束する」の否定ですね．この「a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$」を「条件なしの数列」と「a に収束する」に分けて書き換えると (B)「任意の数列 $\{a_n\}$ に対して，“$\{a_n\}$ が a に収束する” ならば “$\{f(a_n)\}$ は α に収束する”」．この否定は (C)「数列 $\{a_n\}$ で，次を満たすものが存在する：[“$\{a_n\}$ が a に収束する” ならば “$\{f(a_n)\}$ は α に収束する”] でない」．ここで，“A ならば B” は “(A でない) または B” と論理的に等価だから，ド・モルガンの法則を用いれば (C) は (D)「数列 $\{a_n\}$ で，次を満たすものが存在する：[“$\{a_n\}$ が a に収束する” かつ “$\{f(a_n)\}$ は α に収束しない”]」となります．

質問： p 39，例 5.21 の n の範囲は実数ですか?

お答え： いいえ．与えられた r に対して数列 $\{r^n\}$ を考えている（「数列」と明記してありますね）のですから，n は正（または負でない）整数を動く，ということが読み取れます．

質問： 実数の連続性の公理は有理数の範囲では正しくない（注 5-15）とのことですが，有理数と無理数の境目がわからなくなりました．0.1001000100001 . . . のように無限ケタまで，各ケタの数を指定した数は有理数ではないのでしょうか? （有限ケタであれば有理数?）

お答え： 高等学校で学んだように有理数は <u>循環小数</u> で表される．この例は循環小数でないので，有理数ではない．

質問： (公理 5.12) を実数の連続性といわれるのがよく分からない．

お答え： 公理 5.12 に「実数の連続性」と名前をつけたのだ，と思えばよい．わからないのはどこ?

質問： 物理や化学の実験で，得た数値の自然対数をとると，規則性がみつかることがよくある気がします．$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は何者ですか?

お答え： 前半：常用対数でも同じ．2 つの量 x, y が $y = Aa^x$ のような関係にあるとき $\log y$ は x の 1 次関数になるのが鍵．このとき，対数の底を変えても係数が変わるだけで，1 次関数であることは変わらないので，e が特別な役割をしているわけではありません．対数グラフなどは常用対数を使います．e の役割はもうすこし別のところにあって，$f(x) = \log_a(x)$ の $x = 0$ における微分係数が 1 となるような唯一の底 a の値だったわけです．

質問： $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が収束する理由がよくわからなかったです． **お答え：**問題 5-8．問題にほとんど答えがある．

質問： $\{a_n\} = \frac{1}{n}$ と書きたくないのは，a_n という数列全体が $\frac{1}{n}$ であるかのように見えるからですか?

お答え： そう思って良い．第 n 項 a_n は $1/n$ なので $a_n = 1/n$ と書く．片方だけに { } を書くのはおかしい．

質問： 授業で公理とは何かを説明してくださったとは思うのですが，聞き取れていなかったので，もう一度教えて下さい/公理がよくわからなかった． **お答え：**講義ノート，注意 5.13.

質問： ド・モルガンの法則に排他的論理和はありますか?

お答え： 意味がわかりません．講義ノートの「ド・モルガンの法則」のどこにも排他的論理和はないですが. . .

質問： 無限大の記号 ∞ はどの辺が無限大を表しているのでしょうか?

お答え： 検索するとローマ数字の 1,000，ウロボロス等が出てきますが，確実には解らないのではないでしょうか．

質問： p 35 補題 5.7 の証明で (2) で「正の数 ε を任意にとる」とあって p 34 の定義 5.2 では「任意の正の実数 ε」となっていますが，p 35 のは「実数」でなくてもよいのですか?

お答え： 「正の数」は「正の実数」を暗黙にあらわしていると思ってください．実際，虚数は正負は考えられませんね．

質問： 微小変化量を h と表しますが，h は何が由来なのでしょうか．/ なぜ小さい数は ε で表すのですか?

お答え： なぜでしょうね．残念ながら知りません．

質問： 無理して「振動する」という表現を用いる必要ないということでよろしいでしょうか？ **お答え：**はい．

質問： 「限りなく」という言葉を避けるのは，あいまいな表現だからですか．それとも論理的に定義することが難しいもしくは慣例的に避けているのでしょうか?

お答え： 「限りなく」とうい言葉で極限をのべたあとに論理的な展開をする道具を我々がもたないからです．

質問： フーリエ級数はどこで学ぶのですか? **お答え：**たとえば「工業数学」