微分積分学第二 B (7)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/

2014.11.19

お知らせ

- 防災訓練へのご協力ありがとうございました.
- 次回は 12 月 3 日（水曜日）です.
  11 月 26 日は月曜日授業
- 次回
  中間試験（12 月 17 日実施予定）の予告
  をいたします.

質問

Q: **講義ノート** p. 44 **の「恒等関数」の具体例をいくつか上げていただけるとうれしいです.**

A:
- **講義ノート** 44 **ページ:「恒等関数** $\mathrm{id}(x) = x$ **は** $\mathbb{R}$ **で連続である.」**
- **同脚注:「**x **に対して** x **それ自身を対応させる関数を恒等関数という」**
- **「恒等関数」は(定義域を定めれば)ただひとつ.**

質問

Q: ε-δ **式は関数の極限の定理等を証明する時くらいしか授業では使いませんか?**

A: ε-δ **式は関数の極限の定義だから，極限の定理「等」の証明にでてくるし，関数の極限と全く関係ない場面にはでてこない．**
「等」の意味が不明だが，広くとれば何も限定しなくなるので「これ以外に使わない」という結論を求めるにはまずい言い回し．

質問

Q: **右極限値と左極限値が異なる関数はあると思うんですが，その関数は連続でないといえますか？ また，この条件のとき他に言えることはありますか？**

A: **講義資料 + 補足：**

補題 6.2: **点 a を含む開区間 I から a を除いた集合 $I \setminus \{a\} = \{x \in I \mid x \neq a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$ をみたしているならば，$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ である．**

事実： $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ **ならば** $\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$.

定義 6.7: **区間 I で定義された関数 f が I の点 a で連続であるとは，**

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

をみたすことである．

後半： **どんな答を期待している？**

質問

Q: **命題** 6.9 **の** $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(fg)(x)=f(x)g(x)$, $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ **で定まるが何故成り立つのかがわからない．**

A: **「何が成り立つ」という主張か，読み取れている**? **読み取れているなら質問の文章に反映させましょう．この文では「読み取れていない」ようにしか見えません．**

命題 6.9: **区間** I **上で定義された関数** f, g **が連続なら**

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (fg)(x)=f(x)g(x), \quad \ldots(\text{略})$$

で定まる $f+g$, fg, f/g **は** I **上で連続である．**

直前の文： **問題** 6-5 **を用いれば，次がすぐわかる．**

質問

Q: **結論での「任意の正の数 ε」とあるのに"えらべない"とはどういうことでしょうか?**

A: **そこだけを切り出してもわかるわけがありません．「任意の正の数 ε に対して＊＊が成り立つ」が結論です．最後まで読みましょう．**
これを証明するのが使命と思うと，方法は 2 つくらい思いつきます：
(1) 考えられる ε を全て並べて，各々に対して結論を示す．
(2) 誰かに ε が与えられたら，それが何であっても＊＊が成り立つことを示せる，という仕組みを作る．
このケースでは (1) は不可能なので，(2)．ε を持ってくるのはあなたではないので，使命は「何が来ても受けてたてる」体制を作ること．「0.1 以上の ε しか受け付けない」などと言う権利はないのです．

A ならば B

A	B	not A	(not A) or B	$A \Rightarrow B$
真	真	偽	真	真
真	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	真	真

- $P(x)$: 「“$x \neq 0$ ならば $x^2 > 0$”」
- 「任意の実数 x に対して $P(x)$ は真」
- 「どんな実数 x を持ってきても $P(x)$ は真」
- とくに
  - $P(1)$：「$1 \neq 0$ ならば $1 > 0$」 真
  - $P(-1)$ ：「$-1 \neq 0$ ならば $1 > 0$」 真
  - $P(0)$：「$0 \neq 0$ ならば $0 > 0$」 真．

補足：問題 5-5

仮定： $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$

結論： $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha.$

仮定*： 任意の正の数 ε' に対して，次を満たす番号 N' が存在する：「$m \geq N'$ ならば $|a_m - \alpha| < \varepsilon'$」

結論*： 任意の正の数 ε に対して，次を満たす番号 N が存在する：「$n \geq N$ ならば $\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha\right| < \varepsilon$」

任意に与えられた正の数 ε に対して

1. 次を満たすような番号 N' をとる：「$m \geq N'$ ならば $|a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」
2. 上の N' に対して $M = |a_1 - \alpha| + \cdots + |a_{N'} - \alpha|$ とおく．
3. 上の M に対して $N'' = \left[\frac{2M}{\varepsilon}\right] + 1$ とおく．
4. $N = \max\{N', N''\}$ とおく．

補足：問題 5-5 つづき

結論*： 任意の正の数 ε に対して，次を満たす番号 N が存在する：
「$n \geq N$ ならば $\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} - \alpha\right| < \varepsilon$」

任意に与えられた正の数 ε に対して

1. 次を満たすような番号 N' をとる：「$m \geq N'$ ならば $|a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」
2. 上の N' に対して $M = |a_1 - \alpha| + \cdots + |a_{N'} - \alpha|$ とおく．
3. 上の M に対して $N'' = \left[\dfrac{2M}{\varepsilon}\right] + 1,\ N = \max\{N', N''\}$ とおく．

すると，$n \geq N$ を満たす任意の n に対して

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha\right| &\leq \frac{|a_1 - \alpha| + \cdots + |a_{N'} - \alpha|}{n} + \frac{|a_{N'+1} - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n} \\
&= \frac{M}{n} + \frac{|a_{N'+1} - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n} \\
&< \frac{M}{N''} + \frac{(n - N')\frac{\varepsilon}{2}}{n} < \frac{M}{2M/\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$