

微分積分学第一講義資料 7

お知らせ

今回は12月3日です。中間試験予告を致します。

前回までの訂正

- 講義資料 6, 2 ページ, 上から 6 行目: 単調非現象 \Rightarrow 単調非減少

質問と回答

質問: 講義ノート p. 44 の「恒等関数」の具体例をいくつか上げていただけると嬉しいです。

お答え: x に対して x を対応させる対応の規則を恒等関数といいます。それに f という名前をつければ $f(x) = x$ です。すなわち恒等関数はただひとつしかありません。講義ノートでは、それに id という名前をつけています。

質問: A ならば $B \Leftrightarrow \text{not } A \text{ or } B$ がなぜそうなるのかという説明がよく分からなくて釈然としていないので、もう一度お願いします。

お答え: たとえば「任意の実数 x に対して “ $x \neq 0$ ならば $x^2 > 0$ ” という文は正しい (真)。すなわち、どんな実数 x を持ってきて “ \sim ” の部分は真ということ (それが「任意の x に対して \sim 」の意味)。すると (a) 「 $1 \neq 0$ ならば $1^2 > 0$ 」(b) 「 $-1 \neq 0$ ならば $(-1)^2 > 0$ 」(c) 「 $0 \neq 0$ ならば $0^2 > 0$ 」。のいずれもが真。とくに (c) を見れば「 A ならば B 」は、 A が成り立たない (偽) のときは (B の真偽にかかわらず) 真とするべきでしょう。すると、 A, B の真偽の応じて右のようになります。

A	B	$\text{not } A$	$(\text{not } A) \text{ or } B$	$A \Rightarrow B$
真	真	偽	真	真
真	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	真	真

質問: ド・モルガンの法則の (6.1) についての質問です。「 P ならば Q 」は「(P でない) または Q 」と同値であるというは (原文ママ: ということはこのこと?) P と Q の関係が同じだということですか? (山田注: 集合の図がありました省略)。お答え: そういうことです。

質問: 「 P ならば Q 」は「(P でない) または Q 」と同値とありますが、これは「 P ならば Q 」の定義と考えれば良いですか? お答え: そう考えて頂いても結構です。

質問: 例 6.13 の (2) と (3) で最初の 1 つが偽なので偽であるということと、最初の 1 つが真なので真であるというところが、何が最初の 1 つになるのかがわかりません。また、最初の 1 つだけで決まるということがわかりません。

お答え: 前半: そこにある “ $0^2 > 0, \dots$ ” という無限の言明の「」の中の最初。後半: 「任意の x に対して \sim 」は、“ \sim ” に考えられるすべての x を代入してできる命題全部が成り立つ (and で結ばれる) こと、「ある x に対して \sim 」は、“ \sim ” にすべての x を代入してできる命題のうちどれか 1 つが成り立つ (or で結ばれる) ことと説明したと思いますが、これから (2) 「 \sim 」の中のうち 1 つでも成り立たなければ偽、(3) 「 \sim 」のうち 1 つが成り立てば真。最初である必要はないのですが、この場合は最初の式がキーになっていますね。

質問: 結論での「任意の正の数 ε 」とあるのに “えらべない” とはどういうことでしょうか?

お答え: そこだけを切り出してもわかるわけがありません。「任意の正の数 ε に対して $**$ が成り立つ」が結論です。最後まで読みましょう。これを証明するのが使命と思うと、方法は 2 つくらい思いつきます: (1) 考えられる ε を全て並べて、各々に対して結論を示す。(2) 誰かに ε が与えられたら、それが何であっても $**$ が成り立つことを示せる、という仕組みを作る。このケースでは (1) は不可能なので、(2) ε を持ってくるのはあなたではないので、使命は「何が来ても受けてたてる」体制を作ること。「0.1 以上の ε しか受け付けない」などと言う権利はない。

質問： 授業で「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \alpha$ 」を示していた時、 $|a_1 - \alpha| + \dots + |a_{N'} - \alpha| = M$ とおいた先から分からなくなってしまったのですが、これは N' を用いて仮定を利用したときとはまた別に、もう一度都合のよい N'' を考えてあげて、仮定を利用したということですか？

お答え： 仮定を利用して N' をとり、それを用いて N'' をとった。 N'' をとる部分は仮定を利用していません。

質問： 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \alpha$ 」の証明の過程において、

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \alpha \right| &= \frac{1}{n} (|a_1 - \alpha| + \dots + |a_{N'} - \alpha|) + \frac{1}{n} (|a_{N'+1} - \alpha| + \dots + |a_n - \alpha|) \\ &<_{(2)} \frac{1}{n} (|a_1 - \alpha| + \dots + |a_{N'} - \alpha|) +_{(1)} \frac{(n - N')\epsilon'}{n} \end{aligned}$$

(1) の変形と (2) の値が決め打ちという点がよく分かりませんでした。教えていただきたいです。

お答え： (1) : $k \geq N'$ ならば $|a_k - \alpha| < \epsilon'$ となるように N' をとっているのです、上の行の分子の各項は ϵ' 未満。そういう項が $n - N'$ 個がある。(2) 番号 N' を固定すれば、この部分の分子は n をどうとろうが、同じ値になります。それが「決め打ち」。

質問： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \alpha$ の証明で、途中式の中で(上のご質問と同じ式なので省略)となりますが、 $\frac{1}{n} (|a_1 - \alpha| + \dots + |a_n - \alpha|) \leq \frac{1}{n} n \epsilon' \leq \epsilon$ という変形ではいけないのですか。 ϵ' は任意の正の数なのだから、なぜわざわざ $|a_{N'+1} - \alpha| + \dots + |a_n - \alpha|$ だけ変形したのですか。

お答え： 与えられた ϵ に対して、 $\epsilon' = \epsilon$ 、として「 $n \geq N'$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon'$ 」となる N' を選んでいるわけです。すると、一般に $|a_1 - \alpha| < \epsilon'$ は言えないのではないのでしょうか。

質問： 授業でやった $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \alpha$ の証明で、仮定の方の ϵ' は好きにとっていいと書かれていましたが、これは仮定が任意の ϵ' で成立するために、証明の中では ϵ' をある数(ここでは $\frac{\epsilon}{2}$) に定めても問題ないということですか？ お答え：そういうことです。

質問： 定義 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ について、「 $|a_n - \alpha| < \epsilon$ 」というのは、「 a_n が誤差 ϵ 以下で α の近くにある」であり、 $n \leq N$ より $\alpha_N \leq \alpha_n$ (原文ママ: $a_N \leq a_n$ のことか?) であるから $|a_N - \alpha| \leq |a_n - \alpha| < \epsilon$ となり、 N がその誤差 ϵ 内に存在できるということですか？ だとしたら a_n が負で単調現象のとき、 $|a_n - \alpha| \leq |a_N - \alpha|$ になりませんか？

お答え：「 $N \leq n$ より $a_N \leq a_n$ 」はなぜ成り立つのか。これが一般に成り立つなら数列はいつでも単調非減少のはず。「 \sim だから誤差 ϵ の中に存在できる」ともいっていません。「 α からの誤差が ϵ 以内にあるようにできる」ときに...、というのが定義です。「 $**$ が成り立つ」というのが定義で成り立つ理由を述べているわけではありません。

質問： 授業中の証明で ϵ' や ϵ'' を勝手に $\epsilon/2$ に置き換えているのはなぜですか？

お答え：「とりあえず ϵ' と書くが、あとで置き換える」と宣言してから板書したはず。

質問： 命題 6.9 の $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ で定まるが何故成り立つのかがわからない。お答え：「何が成り立つ」という主張か、読み取れている？ 結論は「連続である」。直前に「問題 6-5 を用いればすぐわかる」とあるが、見ましたか？ すぐわかると思いませんか？

質問： 右極限值と左極限值が異なる関数はあると思うのですが、その関数は連続でないといえますか？ また、この条件のとき他に言えることはありますか？ お答え：前半：補題 6.2 と定義 6.7 から。後半：どんな答を期待している？

質問： 例 7.16 の冪乗根について、正の数に限定していますが、負の数や虚数についても例と同様にして定義されるのですか？ なぜ正の数に限定したのでしょうか。お答え：この証明は中間値の定理によるが、これは大小関係を用いるので、虚数に対して適用できない。偶奇による場合分けが面倒なので、例として正の数の冪乗根だけを考えた。

質問： p 55, (7.4) は n が正の整数のときにしか成り立たないんですか。お答え：ここでは正の整数に限った例を与えただけ。正の整数でなくても(適当な仮定のもと)成り立つことは(証明はともかく)は知ってますよね。

質問： $0.1001000100001\dots$ のような規則性をもった無理数や $\sqrt{3}$, $\log 10$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ のように、ある規則に従って指定された以外の、全くもってランダムな数の羅列によってつらられる無理数は存在すると言っているのでしょうか？ お答え：「全くもってランダム」が何か分かりませんが、0 から 9 までの整数からなる任意の数列 $\{p_n\}$ に対して、それを書くケタにもつ無限小数は実数を表している、というのが例 5.14 で示したことです。

質問： $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1} \times \sum 10^{-(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1)}$ は無限大の整数ですが、有理数なのでしょうか？ (0.1001000100001... を整数にした数) お答え：無限大の整数というものはありません。

質問： ϵ - δ 式は関数の極限の定理等を証明する時くらいしか授業では使いませんか？ お答え： ϵ - δ 式は関数の極限の定義だから、極限の定理「等」の証明にでてくるし、関数の極限と全く関係ない場面にはでてこない。「等」の意味が不明だが、広くとれば何も限定しなくなるので「これ以外に使わない」という結論を求めるにはまずいい言い直し。