2014 年 12 月 3 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 8

お知らせ

- **12 月 17 日**に**中間試験**を行います．本日欠席した方は，講義 web，OCW より文書を入手して下さい．

前回までの訂正

- 中間値の定理の証明の概略を説明しましたが，その中で，区間 $[a_j, b_j]$ を "$[a, b]$ を 2 等分したもの" と板書したようです．$[a_{j-1}, b_{j-1}]$ を 2 等分したものの誤りです．
- 同じところで，$b_j - a_j = \frac{1}{2^j}$ と書いたようですが，$b_j - a_j = \frac{b-a}{2^j}$ の誤りです．
- 実数の公理について，黒板に「順存」と書いたらしい．「順序」です．
- 講義ノート 55 ページ，例 7.16 の 3 行目：α **の** n **乗根** $\Rightarrow$ α **の（正の）**n **乗根**

授業に関する御意見

- "等" と "しか" の話は国語の授業みたいでした．"研究する" の意味の解説も同様に思いました．　**山田のコメント：** 数学はことばですからね．
- 教室が寒くてつらかったです．　**山田のコメント：** 了解．暖房のスイッチの場所は知っていますか?
- 区間縮小法で，突然数式で証明をしないで，グラフで見せてもらえたのが分かりやすかったです．　**山田のコメント：** それを式におとすのが，ちょっと難しい．

質問と回答

質問： 定理 7.15 の証明で，最後の方に出てきた「$\alpha = \beta \underset{\to}{=} c$ とおくとこれが求めるもの」という板書の β と c の間の記号が何だか分かりません．「:=」みたいなものですか?　**お答え：**説明なしで申し訳ない．むしろ「=:」．

質問： 定理 7.15 は「f: $[a, b]$ で連続，$f(a) \leqq 0$, $f(b) \geqq 0 \Rightarrow f(c) = 0$ となる $c \in [a, b]$ が存在」でも成立すると思ったのですが，ダメですか．　**お答え：**もちろん大丈夫．実際，$f(a)$, $f(b)$ の少なくとも一方が 0 の場合と, そうでない場合に分ければ定理 7.15 から結論が従う．

質問： 「連続であるから中間値の定理が成り立つのではなく，中間値の定理が成り立つから連続」と言っていたのですが，鶏卵ではなくはっきりきまっているものなのですか?

お答え： そうは言わなかったはず（「連続」は数学用語としてきちんと意味がある．この授業の文脈ではその意味でしか使いませんが，定義は大丈夫？）正しくは「グラフがつながっているから中間値の定理は成り立つ」というのは（"つながっている" という語は厳密な意味ではなく直感的に用いている）実はあまり正しいとはいえず,「中間値の定理が成り立つ，ということからグラフがつながっていると思える」というべきだろう，という説明でした．

質問： 定義 6.1 の 4 行目は '「$0 < \underline{|x - a|} < \delta$ をみたす $\forall x \in I$ に対し，$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$」となっているのに，7 行目はここ（下線のところ）に絶対値が無いのはなぜですか?

お答え： 右極限の定義だからです．"$x > \alpha$，かつ α に近いとき" を式で表すと絶対値のない式になります．

質問： 11/19 の授業ノート 2/4 定理 7.8 「上に（下に）有界な実数の部分集合は必ず上限（下限）をもつ」は有理数に対しては成立しないとありますが，無理数に対しては必ず成立しますか?

お答え： いいえ（ここで無理数全体の集合を考えるのは筋が悪いような気がしますが)．実際，$X = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqq 2$ かつ x は無理数 $\}$ とおくと，X は上に有界な無理数の集合だが，いかなる無理数も X の上限にならない．

質問： 例 7.17 の区間 $f(I)$ とは $[a, b]$ に対応する y の範囲を表しているのですか?

お答え： $I = [a, b]$, $y = f(x)$ とするならそうです（この文脈では y という文字が未定義)．

質問： 問題 7-6 をどうやって解いたらいいか分かりません．$\alpha \in f(I)$ で $\lim_{x\to\alpha} f^{(-1)}(x) = f(\alpha)$ を示せばよいんですよね?　**お答え：**そうです．"ε-δ 式" を慎重につかうとできます．仮定と結論をきちんと書いてごらんなさい．

質問： 定理 7.13 についての質問です．複素数平面上で連続な関数 f も，区間 $I=[a,b]$ で最大値，最小値をとると考えてもよいのでしょうか．複素数に大小関係がないと講義で聞いたので，定理 7.13 に違和感を感じました．

お答え： この講義で考える数は実数に限ります，連続性の定義も $\mathbb{R}$ の区間から $\mathbb{R}$ への写像に対して与えてます．連続性の概念は複素数にまで拡張できますが，複素平面上に区間は定義されません．複素数の範囲であれば「複素平面の有界閉集合 C 上で定義された実数値の連続関数 f が，C の 2 点 a, b において $f(a)<0$, $f(b)>0$ を満たすならば，$f(c)=0$ を満たす C の点 c が存在する．」言葉の意味はここでは気にしないでください．

質問： 中間値の定理が実数の連続性の帰結とありますが，定義域が有理数のみの場合などはつかえないということですか? 実際に何か例をあげてもらえるとありがたいです． **お答え：** 講義で挙げた $f(x)=x^2-2$ $(0 \leqq x \leqq 2)$.

質問： $\sup(X\cup Y)=\max\{\sup X, \sup Y\}$ ですが，$\sup(X\cap Y)$ は一般に表せないと解釈してもよいですか?

お答え： 少なくとも $\sup X$，$\sup Y$ とは直接関係しません．たとえば $X=(-1,2)\cup(3,4)$, $Y=(1,3)$ とすると $\sup X=4$, $\sup Y=3$, $\sup(X\cap Y)=2$ ですね．

質問： $\sup(X\cap Y)=\max\{\sup X, \sup Y\}$ （式 (7.1)）は自明に思われるのですが，証明が必要なのですか？

お答え： 自明であるならば，その理由が一言で説明できるはずですが.

質問： sup は surpass の略で，inf は何の略ですか? **お答え：** supremum, infinimum.

質問： 関数 $f\colon I=[a,b]$ で連続であるとき，$\sup f=\max f$，$\inf f=\min f$ となりますか?

お答え： なります．一般に，$\mathbb{R}$ の部分集合に最大値があれば，それは上限になります（確かめよ）.

質問： $f\colon I=[a,b]$ で連続でなくても f は I で最大値/ 最少値（原文ママ：最小値のことか）を取る場合があるのではないでしょうか． **お答え：** ありますよ，もちろん．でも，定理 7.13 は正しいですよね．

質問： 定理 7.13 での最大値をとる・とらないのところで,「最大値をとらない $f(x)\leqq f(c)$ $c\in(0,1)$ とはなりえない」の意味がよく分かりません． **お答え：** どこのことでしょうか．講義ノート?

質問： 「集合 X の要素 M が X の上界であるとき，M を X の最大値という」とありますが，M は同時に上限でもありますよね． **お答え：** そのとおりです.

質問： 級数は，一般に数を表すのではなく，a_j を記号 “+” で並べてつないだ “絵” とみなす，とありますが “絵” っていうのがよく分かりません． **お答え：** 「数」という実態をもつとは限らない「記号の列」ということです.

質問： 資料 p 59 の “注 8.7” で，最後の行に「有限個の項は負であっても構わない」とありますが，なぜ構わないのかがよく分かりません（すみません）．解説お願いします． **お答え：** 収束・発散は先の方での項の変化から決まるから．正確には (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，任意の N に対し $\sum_{n=N}^{\infty}$ も収束．(2) ある番号 N に対して $\sum_{n=N}^{\infty}$ が収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束（確かめよ）．ここで，$\{a_n\}$ の負の項が有限個のとき，最後の負の項を a_N とすると，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と，$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ の収束・発散と一致するが，後者の級数の各項はすべて非負である．

質問： f が a で連続でない $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n=a$, $\{f(a_n)\}$: $f(a)$ に収束しない，をみたす数列が存在する．これの $\{f(a_n)\}$ が $f(a)$ に収束しないと a で連続でないのが何故なのかわからない． **お答え：** 連続の定義 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ は大丈夫? $x=a_n$ が a に近づくときに $f(x)=f(a_n)$ が $f(a)$ に近づかなければならないと思いませんか?

質問： 恒等関数は $\mathrm{id}(x)=x$ しか存在しないんですか? **お答え：** それが定義ですから.

質問： 実数の開区間に端が存在しないのは何故ですか? **お答え：** 端を含まないのが開区間の定義では?

質問： 実数が連続しているということは，実数の個数は無限個ということですか?

お答え： 実数の個数が無限個であるのは，連続性からの帰結ではなく，$\mathbb{R}$ が自然数全体の集合を含んでいることによる.

質問： 無限級数や等比級数や正項級数などは英語で書いたときは不定冠詞 (a/an) をつけるのに，調和級数だけ定冠詞 (the) をつけるのはなぜですか． **お答え：** 固有名詞と思っているからです.

質問： 連続関数や級数についてのギロンが interesting であるとは到底思えません．教授の授業をよいものとするための一意見として少しでも留めて頂ければ幸いであります． **お答え：** (1) よい授業とは interesting なものなのですか? (2) あなたが interesting と思わなかった，すなわち，そういう人が少なくとも 1 人いたということ?

一週間遅れの質問と回答 提出期限に遅れた方のご質問です．なお，得点は加算されません.

質問： なぜ有理数と無理数を区別するのですか? 実数と虚数を区別する理由はだいたいわかるのですが，上記の 2 つは分からないです． **お答え：** この授業ではむしろ区別せずに実数全体を考えるのがよいです.

質問： 「A ならば B」 を否定すると (not A) or B と授業でありました．もう一度「A ならば B」を否定したら「A ならば B」に戻ってくると直感的には思ったのですが，どうして違ってしまうのでしょうか.

お答え： 「A ならば B」 の否定が「(not A) or B」なのではなく，これらは同値.