微分積分学第二 B (9)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/

2014.12.10

お知らせ

- **次回，**12 **月** 17 **日は中間試験を行います．**
  前回出席しなかった方は，予告・持ち込み用紙を講義 web **ページ，**
  OCW **からダウンロードして下さい．**
- **今回は提出物の受付はありません．**

質問

Q: 定理 8.9 の交代級数で $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ であったとき，収束はしないとおもいましたが，いかがですか．単調非増加も満たしていると思いました．

A: 仮定を一つ見落としていませんか?

Theorem (交代級数の和；定理 8.9)

単調非増加で 0 に収束する数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $a_n = (-1)^n q_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ とおくと級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_n = q_0 - q_1 + q_2 - q_3 + \dots$$

は収束する．

質問

Q: **高等学校で教わった「はさみうちの原理」は** $a_n = (-1)^n$ **としたとき成り立たないのでしょうか**?

A: **「はさみうちの原理」の仮定は何でしょう．補題** 5.8 **が高等学校で習ったものと全く同じなんですが．**

Lemma (補題 5.8)

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ **が，各番号** n **に対して** $a_n \leq c_n \leq b_n$ **をみたし，さらに，**$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ **が同じ値** α **に収束するならば，** $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$**．**

Q: **講義ノート** p 63, 8–6 **の** 2 **とは，問題を解く過程で説明なしに使ってよいということでしょうか．**

A: **もちろん知識として使ってよいですが，聞かれたときに使った事実をきちんと述べられるようにしておきましょう．**

質問

Q: **第 n 部分和が収束するとき，それが無限級数になる（山田注：無限級数の和のことを言っているか）というのは，n のところを ∞ におきかえて考えてよいのですか?**

Q: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **は** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ **（部分和）の極限ですが** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **は** $a_1, \dots, a_\infty$ **までの和となぜ考えてはいけないのですか．**

A: **「無限個の和」とは何でしょう**

- **小学校以来親しんでいる和は「有限個」**
- **無限個の和が初めてでてくるのは，高等学校の微積分．そこでの定義は？**

質問

Q: **調和級数と調和関数は調和という点で何か関連があるのですか?**

A: **関係ないと言い切ってよいかちょっと自信がありませんが，多分関係ない．**

Q: **数列の収束についての話をしていた時に，広義積分の話が出てきましたが，対比して考えてみると，数列の和が積分に似ているような気がしてきました．実際にこの 2 つは似た物同士なのですか?**

A: **はい，そのとおりです．数列は，自然数全体を定義域とした関数とみなすことができます．その定義域を連続に拡張していって，数直線上の区間と思った "一般化" が関数と思うと，和と積分の対比は自然と思えます．**

質問

Q: 講義ノート p. 66 の「数列 $\{-n\}$ の上極限と下極限はともに $-\infty$ である」という文でなぜ上極限が $-\infty$ なのかがよく分かりませんでした．$\{-n\}$ は上に有界で，上極限は 0 にはならないのですよね．教えていただけると助かります．

A: 65 ページの定義に忠実に従ってやればわかる．

Definition

数列 $\{a_n\}$ が上に（下に）有界であるとき

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} a_n^+, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} a_n^-.$$

と定め，それぞれ $\{a_n\}$ の上極限，下極限 とよぶ．
ただし $a_n^+ := \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, $a_n^- := \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$.
とくに $\{a_n\}$ が上下に有界なら，上極限・下極限はともに有限．
また $\{a_n\}$ が上に（下に）非有界なときは $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$,
$(\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty)$ と定める．

質問

Q: **すべての項が有理数となるコーシー列で無理数に収束するものが存在するとありますが，どういったものがありますか．**

A: **「有理数からなる数列で無理数に収束する」ものを取れば，補題** 9.8 **よりご質問の条件を満たします．**
そして，そういう例はすでに知っているはずです．

Lemma (補題 5.9)

収束する数列はコーシー列である．