2014 年 12 月 10 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 9

お知らせ

- 次回 12 月 17 日には中間試験を行います．お忘れなきよう．
- 今回は提出物の受付はいたしません．

前回の補足

- 講義ノート 58 ページ，例 8.4 の理由（5 行目から 6 行目の不等式）が分からない，というご質問が 2 件．授業の際に
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8}+\ldots \geqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{8}+\ldots \geqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$
という説明をしましたが，これと同じ．鍵となるのは「$2^{l-1} \leqq k \leqq 2^l-1$ ならば $\frac{1}{k} \geqq \frac{1}{2^l}$」．

前回までの訂正

- 講義ノート第 1 回の解答 **1-3**, 8 行目：$\sqrt{1-\sin^2 0.1}=\sqrt{1-0.01} \Rightarrow \sqrt{1-\sin^2 0.1}\geqq\sqrt{1-0.01}$

授業に関する御意見

- 前回よりも紙が白くなりましたね． **山田のコメント：** そうですか．気が付きませんでした．
- 質問の日本語に毎回悪戦苦闘しています．人に伝えるということは難しいです． **山田のコメント：** それをわかって欲しいのです．
- テスト難しくしないで下さい． **山田のコメント：** はい．いつもどおり易しいです．

質問と回答

質問： 第 n 部分和が収束するとき，それが無限級数になる（山田注：無限級数の和のことを言っているか）というのは，n のところを ∞ におきかえて考えてよいのですか?

お答え： いいえ．「$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n=\alpha$」というひとかたまりの節（熟語）の意味が，「$\displaystyle\alpha=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$」ということです．「$n$ のところを ∞ に置き換える」というだけでは何を言っているのかわからないじゃないですか．

質問： $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ （部分和）の極限ですが $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $a_1, \dots, a_\infty$ までの和となぜ考えてはいけないのですか．

お答え： その「無限個の和」はどう求めるのでしょう．小学校以来習ってきた足し算は有限個の和でした．無限個の和を習ったのは，高等学校で級数を学んだ時が初めて．そこで，この講義と同じ定義を習ったはず．素朴に「無限個の和は有限個の和の類推で考える」とすると，$S=1-1+1-1+\ldots$ のようなパラドクスが起きてしまう．

質問： 授業中の命題 8.6 の例のところで $y^\alpha \leqq n^\alpha \leqq x^\alpha$ の次に $\displaystyle\int_n^{n+1} y^\alpha\,dy \leqq n^\alpha \leqq \int_{n-1}^{n} x^\alpha\,dx$ となっているのですが，この変形がわかりません．

お答え： 実数 α は負の数とすると，y が $n \leqq y \leqq n+1$ を満たしているならば $y^\alpha \leqq n^\alpha$．y が区間 $[n, n+1]$ を動くと考えて，$\displaystyle\int_n^{n+1} y^\alpha\,dy \leqq \int_n^{n+1} n^\alpha\,dy = n^\alpha$．最後の等号は，積分区間（幅は 1）で被積分関数が定数であること

による．

質問： 例 8.4 の説明の時に (1)「上に有界な単調非減少数列は収束」ということと (2)「実数の連続性」の関係性が分かりません．(1) ⇒ (2) なのか，(1) の言い換えが (2) なのかということです．

お答え： (1) が実数の連続性そのものと考えるべきでしょう．注意 5.13 を見よ．

質問： 数列の収束についての話をしていた時に，広義積分の話が出てきましたが，対比して考えてみると，数列の和が積分に似ているような気がしてきました．実際にこの 2 つは似た物同士なのですか?

お答え： はい，そのとおりです．数列は，自然数全体を定義域とした関数とみなすことができます．その定義域を連続に拡張してって，数直線上の区間と思った “一般化” が関数と思うと，和と積分の対比は自然と思えます．

質問： 調和級数と調和関数は調和という点で何か関連があるのですか?

お答え： 関係ないと言い切ってよいかちょっと自信がありませんが，多分関係ない．

質問： 前回の質問の続きっぽくなりますが，「:=」と「=:」て違うのですか? やはりあの記号がよく分からないです．

お答え： 講義ノートでは前者の意味しか述べていないので，後者は類推してもらうしかないのですが「$A := B$」は A を B と定義する，という意味．コロンの側にあるものが定義したいもの，反対側が定義の内容（既知のもの）．

質問： 講義資料 p. 68 の補題 9.9 の証明において $\varepsilon = 1$ とおくことの意味は何でしょうか?

お答え： 1 でなくても正の数なら何でもよいです．「適当に正の数をとって」というより 1 と決め打ちにした方が論理の筋道はわかりやすくありませんか?

質問： 講義ノート p 63, 8–6 の 2 とは，問題を解く過程で説明なしに使ってよいということでしょうか．

お答え： もちろん既知として使ってよいですが，聞かれたときに使った事実をきちんと述べられるようにしておきましょう．

質問： 高等学校で教わった「はさみうちの原理」は $a_n = (-1)^n$ としたとき成り立たないのでしょうか?

お答え： 「はさみうちの原理」の仮定は何でしょう．補題 5.8 が高等学校で習ったものと全く同じなんですが．

質問： 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束 ⇒ $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ も収束（N は 0 以上）は成立しますが，その逆は成立しないということで合っていますか? a_n $(n = 0, \dots, N-1)$ で少なくとも一つが ∞ と定まっていたら $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しないですよね?

お答え： 講義では逆も成立（一つの N に対して，N からの和が収束すれば元の和も収束）と述べましたよね．∞ は数ではありませんから，一つの a_k が ∞ になるような数列はありません．

質問： 講義ノート p. 66 の「数列 $\{-n\}$ の上極限と下極限はともに $-\infty$ である」という文でなぜ上極限が $-\infty$ なのかがよく分かりませんでした．$\{-n\}$ は上に有界で，上極限は 0 にはならないのですよね．教えていただけると助かります．

お答え： 65 ページの定義に忠実に従ってやればわかる．$a_n = -n$ とし，$A_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\} = \{-n, -(n+1), \dots\}$ とすると，$a_n^+ := \sup A_n = -n$．したがって

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n^+ = \lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty.$$

質問： 定理 8.9 の交代級数で $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ であったとき，収束はしないとおもいましたが，いかがですか．単調非増加も満たしていると思いました．

お答え： 仮定を一つ見落としていませんか? 「単調非増加で 0 に収束する数列. . .」

質問： p 68, 命題 9.6 の証明で，ε'（略）とか ε''（略）とかおいてますけど，なんでそんな気軽に β に絶対値をつけてるんですか．ε', ε'' を正の数にしなきゃならないのはわかりますが．

お答え： 何が不満なんでしょう．β は実数なのだから，$|\beta|$ ちゃんと意味をもつと思いますが．

質問： すべての項が有理数となるコーシー列で無理数に収束するものが存在するとありますが，どういったものがありますか．

お答え： 「有理数からなる数列で無理数に収束する」ものを取れば，補題 9.8 よりご質問の条件を満たします．そして，そういう例はすでに知っているはずです．

質問： 条件収束する級数はどのようなものがありますか． **お答え：** 例 9.21，すなわち例 8.10．

質問： 例 8.10 (1) の和の値の求め方はどのようにすればよいですか? ($\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ を求める方法でなく $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ から $\log 2$ を求める方法が知りたい)．

お答え： あらゆる問題に有効な一般論はありません．多分「知らなければできない」と思います．実は「大抵の計算は知らなければできない」あるいは「大量の試行錯誤が必要」です (という話は何回か授業でしましたよね)．

質問： 定理 8.2 の証明の理由が本当にそのようになるのかわからない． **お答え：** どこの部分を指していますか?