2014 年 12 月 17 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 中間試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用できますが，採点の対象とはしません.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 12 月 24 日の講義の際に返却する予定です. それ以降は**数学事務室 (本館 3 階 332B)** で受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は，2015 年 1 月 7 日までに山田まで電子メイルでお申し出いただくか，1 月 7 日の授業終了後にご連絡ください．なお，管理の都合上，上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**.

指定用紙のみ持込可

定理など:

定理 A: 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^∞-級ならば

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する．とくに $h\to 0$ のとき $R_{n+1}(h)=o(h^n)$ である.

定義 B: 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは，任意の正の実数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである：「$n\geqq N$ をみたすすべての番号 n に対して $|a_n-\alpha|<\varepsilon$」.

定理 C: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束するならば，$\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_nb_n\}$ はそれぞれ $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ に収束する.

公理 D: 上に有界な単調非減少数列は収束する.

定義 E: $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.

定理 F: 次の不等式が成り立つ：
(1) $0<x<1$ のとき $x<\sinh x<2x$; (2) $0<x<1$ のとき $\frac{1}{2}x<\tanh x<x$;
(3) $0<x<1$ のとき $1+\frac{1}{2}x^2<\cosh x<1+x^2$.

問題 A 文中の $\boxed{1}$∼$\boxed{27}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ，下線 **a** の不等式を示しなさい. [50 点]

関数 $f(x)=\cosh x$ に対して，$a=0$, $h=x$, $n=5$ として定理 **A**（冒頭枠内）を適用すると,

$$\cosh x=\boxed{1}+\boxed{2}x+\boxed{3}x^2+\boxed{4}x^3+\boxed{5}x^4+\boxed{6}x^5+R_6(x),$$
$$R_6(x)=\boxed{7}\quad(0<\theta<1)$$

と書ける．とくに $x=0.3$ とすると

$$\cosh 0.3=\boxed{8}+R_6(0.3)\qquad {}_{\mathbf{a}}\underline{\boxed{9}<R_6(0.3)<\boxed{10}}$$

が成り立つ[1]．したがって，$\cosh 0.3=\boxed{11}.\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}\boxed{19}\boxed{20}\dots$[2]
である.

一方，$\tan x=\boxed{21}+\boxed{22}x+\boxed{23}x^2+\boxed{24}x^3+o(x^4)$ となるので，極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x+a+bx^2}{x(\tan x-x)}$$

が存在するための条件は $a=\boxed{25}$, $b=\boxed{26}$ で，そのときの極限値は $\boxed{27}$ となる.

[1] $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ には小数が入る．10 の指数を用いた表示でもよい.

[2] $\boxed{11}$–$\boxed{20}$ には，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 または × を入れる．上の推論から，その桁の数字が確定する場合は，その数字を，そうでない場合は × を入れよ.

問題 B 次の定理 G, H について，以下の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{7}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉をいれ，後の問題 **a**~**d** に答えなさい． [40 点]

> **定理 G:** 数列 $\{s_n\} = \{s_0, s_1, \ldots\}$ が実数 σ に収束するとする．このとき，新しい数列 $\{t_n\}$ を $t_n = s_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で定義すると，$\{t_n\}$ も σ に収束する．
>
> **定理 H:** 数列 $\{a_n\}$ から定まる無限級数
>
> $$(*) \qquad a_0 + a_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$
>
> が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．

- 定理 G を証明しよう：この定理の仮定は $\boxed{1}$, 結論は $\boxed{2}$ であることに注意する．任意の正の数 ε を一つとる．このとき，仮定から次を満たす番号 N_0 が存在する：$\boxed{3}$. このとき $N = \boxed{4}$ とすれば，$n \geqq N$ を満たす任意の番号 n に対して $\boxed{5}$ が成り立つので結論が得られた．
- 定理 H の証明は，第 n 項までの部分和 s_n に対して，$a_n = s_n - s_{n-1}$ であることを用いれば $_{\mathbf{a}}$<u>示すことができる.</u> また，$_{\mathbf{b}}$<u>この事実の逆は $\boxed{6}$</u>[3].
- 数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ を，各項 q_n が 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のいずれかからなるものとする．このとき，$_{\mathbf{c}}$<u>級数</u>

  $$(\star) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{10^n}$$

  <u>は収束する</u>．この級数の各項は有理数であるが，その和は $_{\mathbf{d}}$<u>有理数に $\boxed{7}$</u>[4].

問題 a: 定理 H に証明をつけなさい．

問題 b: 下線 **b** の部分の理由を述べなさい．

問題 c: 級数 $(\star)$ が収束することを証明しなさい．

問題 d: 下線 **d** の部分の理由を述べなさい．

問題 C 次の級数は収束するか，理由をつけて答えなさい． [10 点]

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

問題 D [0 点] この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

おつかれさまでした ♡

[3] $\boxed{6}$ には「成立する」「成立しない」のいずれかが入る．
[4] $\boxed{7}$ には「なる」「なるとは限らない」のいずれかが入る．

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–6/7/8/9–10+a/11–20/21–24/25–26/27: 各 5 点

1	2	3	4	5	6	7
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{x^6}{720}\cosh\theta x$

8	9	10
1.0453375	10^{-6}	1.2×10^{-6}

下線 a の理由：

定理 F の 3 番目の不等式を用いれば,

$$
\begin{aligned}
R_6(0.3) &= \frac{(0.3)^6}{720}\cosh(0.3\theta) \geqq \frac{(0.3)^6}{720}\cosh 0 = \frac{3^6\cdot 10^{-6}}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \frac{3^4\cdot 10^{-7}}{8} = \frac{81}{8}10^{-7} \geqq 1.0125\times 10^{-6}.\\
R_6(0.3) &= \frac{(0.3)^6}{720}\cosh(0.3\theta) \leqq \frac{(0.3)^6}{720}\cosh 0.3 \leqq \frac{(0.3)^6}{720}\left(1+(0.3)^2\right) = \frac{3^6\cdot 10^{-6}}{720}\cdot 1.09\\
&\leqq \frac{81}{80}\times 1.09\cdot 10^{-7} \leqq 1.103625\times 10^{-6}
\end{aligned}
$$

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	4	5	3	3	8	×	×	×

21	22	23	24	25	26	27
0	1	0	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

- 途中の誤った解答から正しい推論で得られたと思われる解答には得点を与えていることがあります.
- 7: $x^6(e^{\theta x}+e^{-\theta x})/1440$ も正解だが，双曲線関数の文脈で，とくに双曲線関数の記号を使わないのは筋が悪いような気がします.
- 11–20: 9–10 からの推論で得られる答を正解としています.

学籍番号	氏　名

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–2/3/4/5/a/6/b/c/7/d: 各 5 点

1

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sigma$$

2

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \sigma$$

3

$n \geqq N_0$ をみたすすべての番号 n に対して $|s_n - \sigma| < \varepsilon$

4

$N_0 + 1$

5

$|t_n - \sigma| < \varepsilon$

問題 a：

級数 $(*)$ の第 n 項までの部分和を s_n とすると，仮定より $\{s_n\}$ はある実数 σ に収束する．このとき，定理 G より $\{s_{n-1}\}$ も同じ σ に収束するので，冒頭の定理 C（訂正あり） から

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \sigma - \sigma = 0.$$

ここで，$s_n - s_{n-1} = a_n$ なので $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

6

成立しない

問題 b：

$a_n = 1/(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})$ とすると，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるが，

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \bigl(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\bigr) = \sqrt{n+1} \to +\infty \qquad (n \to \infty)$$

なので，$\{a_n\}$ から定まる級数は発散する．

- 3:「任意の正の数 ε に対して」が入っているのは誤り．最初に与えられた正の数 ε に対応して，という文脈なので，その後に ε を与えなおしてはいけません．
- 6/b: 6 が「成立しない」で b が空白の場合は両方とも不正解．
- 言葉：「収束値」が散見されたが「極限値」というのではないか．
- 言葉：「題意」が散見されたが，この語の意味はなにか（山田は正確な意味を知らないので教えて欲しい）．

学籍番号	氏　名

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 B の解答欄（つづき）

問題 c：

第 n 部分和を $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{10^k}$ とおくと，

- $s_n - s_{n-1} = q_n/10^n \geqq 0$ なので，$\{s_n\}$ は単調非減少．
- 各番号 n に対して，

$$s_n \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{9}{10^k} = 9 \times \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = 10\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right) \leqq 10$$

なので，$\{s_n\}$ は上に有界．

したがって，冒頭の公理 D より $\{s_n\}$ は収束する．

7

なるとは限らない

問題 d：

$q_0 = 3,\ q_1 = 1,\ q_2 = 4,\ \dots,$
$q_n = \pi$ を 10 進む小数で表したときの n 桁めの数字 とすると，級数 $(\star)$ は π に収束するが，これは無理数である．

- c: $0 \leqq s_n \leqq 1/10^n$ で，$\sum(1/10^n)$ が収束するから収束，と結論するのは正しいが，“$0 \leqq \dots$” がないものは不正解．
- c: ダランベールやコーシー・アダマールの収束判定法を用いた方：数列 $\{q_n\}$ に 0 が含まれている場合，ある番号からあとがすべて 0 の場合を忘れていませんか?
- c: $\sum_{n=0}^{\infty}(q_n/10^n) \leqq \dots$ というフレーズが多く見られたが，この値が「存在する」ことを示すのがミッションであるから，証明の中ではこれを「値」として扱ってはいけない．

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 4〕

問題 C の解答欄 配点：各 5 点

(1)

収束する：$n \geqq 3$ に対して

$$2^n = (1+1)^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} \geqq \binom{n}{3} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2).$$

したがって

$$\frac{n}{2^n} \leqq \frac{6n}{n(n-1)(n-2)} \leqq \frac{6}{(n-1)(n-2)} \leqq \frac{6}{(n-2)^2}.$$

ここで

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{(n-2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}$$

は収束するので正項級数の比較判定法より収束する．

(2)

収束する：各項の絶対値をとった級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

となるが，これは収束する．すなわち与えられた級数は絶対収束するので，収束する．

- (1): 積分を用いた比較も可．
- (2): 交代級数の収束条件を用いても良い．
- (2): ダランベールの収束判定条件，コーシー・アダマールの収束判定条件はこの級数に対しては使えない．

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 5〕

この用紙には，問題 D への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 D この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2014 年度入学の方は，学籍番号のうち “14_” を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 5 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．6 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

途中退室：

- 試験開始後 45 分を経過したら途中退室を認めます．
- 退室する方は，挙手をして監督者に申し出て，答案を手渡してください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名