微分積分学第二 B (10)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/

2014.12.24

お願い

授業評価にご協力願います

東工大ポータルから

2014**年**12**月**24**日現在** 1/66**名**

おしらせ

- **今回は提出物を受け付けません.**
- **講義ノート第 10 回の内容は，今回と次回（1 月 7 日）に扱います.**
- **講義資料には，あたらしい「授業日程表」をつけておきます.**
- **中間試験答案返却は，数学事務室（本館 3 階 332B）にて**

中間試験問題 D

問題 D： この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

回答： 講義ノートの演習問題の略解があると，復習し易いです．是非，検討の程よろしくお願いします．OCW にアップされている pdf 資料や質問の回答など，すごく丁寧で分かりやすいです．

コメント： 実は，講義 web ページや OCW をくまなく調べるとどこかに解答らしきものがあります．無保証です．

中間試験問題 D

回答： 遅延の連絡への返信ありがとうございました．おかげさまでなんとか間に合いました．おさわがせしてすみませんでした．ありがとうございました．

コメント： 無事でなによりです．

回答： 定理 C に間違いがありました．

コメント： そうですね．2 つめの $\{a_n + b_n\}$ は $\{a_n - b_n\}$ ですね．

回答： 教室が寒かったです．

コメント： ごめんなさい．途中で気づきました．

回答： 計算用紙が欲しいです．

コメント： 裏面を使わないのにはなにか理由があるの?

回答： 講義資料の証明を 1 つ 1 つ理解するのが大変でした．

コメント： そうだと思います．とりあえず，講義で扱うあらすじだけでも気に留めて頂ければよいかと思います．

中間試験問題 D

回答： 証明難しかったです.
コメント： どの?
回答： B は過去問と同じがよかった.
コメント： そうはいかん.
回答： 定期試験は頑張ります ♡
コメント： そうしてね ♡♡♡
回答： 期末試験もよろしくお願いします.
コメント： こちらこそ
回答： 期末テストはもっと簡単になっているとうれしいです.
コメント： 十分簡単でしょう.
回答： 期末が出来る気がしません.
コメント： 大丈夫です，かも知れません.
回答： 前期の内容が出なくてよかった.
コメント： リクエストがあれば出してもよいです.

中間試験問題 D

回答： ハートマークかわいいと思います ♡
コメント： 山田もそう思います ♡♡♡
回答： ハートの数が 1 つしかなくて残念です．
コメント： Sorry ♡♡♡♡♡♡
回答： メリークリスマス!!
回答： サンタさん，彼氏ください．
コメント： 【日本国憲法第 20 条の 3】国及びその機関は、宗教教育その他いかなる宗教的活動もしてはならない。
回答： 60 点いく．ワンチャンあるっしょ（なおギリギリである）
コメント： あるといいね...
回答： ウェイソイヤ w
コメント： ウェイ***
回答： （山田注：ホモォーとシャカシャカがたくさん）
コメント： 面倒くさいので期末試験の際は写真でアップしようかな．
回答： 何もないので書きません．
コメント： と書いてある．

中間試験問題 A

関数 $f(x) = \cosh x$ **に対して，** $a = 0,\ h = x,\ n = 5$ **として定理 A を適用すると，**

$$\cosh x = \boxed{\ 1\ } + \boxed{\ 2\ }x + \boxed{\ 3\ }x^2 + \boxed{\ 4\ }x^3 + \boxed{\ 5\ }x^4 + \boxed{\ 6\ }x^5 + R_6(x),$$

$$R_6(x) = \boxed{\ 7\ } \qquad (0 < \theta < 1).$$

Theorem (定理 A)

関数 f **が** a **と** $a+h$ **を含む区間で** C^∞**-級ならば**

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k + R_{n+1}(h),$$

$$R_{n+1}(h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) h^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1$$

を満たす θ **が存在する．とくに** $h \to 0$ **のとき** $R_{n+1}(h) = o(h^n)$ **である．**

中間試験問題 A

関数 $f(x) = \cosh x$ **に対して，** $a = 0,\ h = x,\ n = 5$ **として定理 A を適用すると，**

$$\cosh x = \boxed{\ 1\ } + \boxed{\ 2\ }x + \boxed{\ 3\ }x^2 + \boxed{\ 4\ }x^3 + \boxed{\ 5\ }x^4 + \boxed{\ 6\ }x^5 + R_6(x),$$

$$R_6(x) = \boxed{\ 7\ } \qquad (0 < \theta < 1).$$

$$f(x) = \cosh x, \quad f'(x) = \sinh x, \quad f''(x) = \cosh x, \quad f^{(3)} = \sinh x, \quad \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\cosh(\theta x) \qquad (0 < \theta < 1)$$

- $\cosh(\theta x)$ **は** $\frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{2}$ **でも正解だが，双曲線関数が文脈に適している．**
- cosh **と** cos **を混同している方が数名．**

中間試験問題 A

とくに $x = 0.3$ **とすると**[a]

$$\cosh 0.3 = \boxed{\ 8\ } + R_6(0.3) \qquad \underline{\boxed{\ 9\ } < R_6(0.3) < \boxed{\ 10\ }}.$$

[a] $\boxed{\ 8\ }$, $\boxed{\ 9\ }$, $\boxed{\ 10\ }$ **には小数が入る．** 10 **の指数を用いた表示でもよい．**

$$\begin{aligned}\cosh x &= 1 + \frac{3^2 \times 10^{-2}}{2} + \frac{3^4 \times 10^{-4}}{24} + R_6(0.3)\\ &= 1 + 0.045 + 0.0003375 + R_6(0.3)\end{aligned}$$

$$R_6(0.3) > \frac{3^6 \times 10^{-6}}{720} \cosh 0 = \frac{81}{80} \times 10^{-6} \geq 10^{-6}$$

$$\begin{aligned}R_6(0.3) &< \frac{3^6 \times 10^{-6}}{720} \cosh 0.3 \leq \frac{81}{80}\left(1 + \frac{3^2}{10^2}\right) \times 10^{-6}\\ &\leq 1.2 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

中間試験問題 A

Theorem (定理 F)

$0 < x < 1$ **のとき** $\cosh x \le 1 + x^2$

Proof.

$g(x) := 1 + x^2 - \cosh x$ **とおくと，** $g'(x) = 2x - \sinh x$, **だから** $0 \le x \le 1$ **のとき**

$$g''(x) = 2 - \cosh x \ge 2 - \cosh 1 = 2 - \frac{e + e^{-1}}{2}$$
$$\ge 2 - \frac{e+1}{2} > 2 - \frac{3+1}{2} = 0.$$

したがって $[0,1]$ **で** g' **は単調増加だから，** $0 \le x \le 1$ **で**

$$g'(x) \ge g'(0) = 0.$$

このことから $[0,1]$ **で** g **は広義単調増加なので，**

$$g(x) \ge g(0) = 1 + 0^2 - \cosh 0 = 0.$$

中間試験問題 A

したがって，

$$\cosh 0.3 = \boxed{\ 11\ }.\boxed{\ 12\ }\boxed{\ 13\ }\boxed{\ 14\ }\boxed{\ 15\ }\boxed{\ 16\ }\boxed{\ 17\ }\boxed{\ 18\ }\boxed{\ 19\ }\boxed{\ 20\ }\ldots$$

である．

$$\cosh 0.3 = 1.0453375 + R_3(0.3), \qquad 10^{-6} < R_3(0.3) < 1.2 \times 10^{-6}$$

$$1.0453385 < \cosh 0.3 < 1.0453387$$

$$\cosh 0.3 = 1.045338\ldots$$

少し甘い評価では?

$$10^{-6} < R_3(0.3) < 2 \times 10^{-6}$$

$$1.0453385 < \cosh 0.3 < 1.0453395$$

$$\cosh 0.3 = 1.04533\ldots$$

中間試験問題 A

一方，$\tan x = \boxed{21} + \boxed{22}x + \boxed{23}x^2 + \boxed{24}x^3 + o(x^4)$ となるので，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x + a + bx^2}{x(\tan x - x)}$$

が存在するための条件は $a = \boxed{25}$, $b = \boxed{26}$.

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\frac{\cosh x + a + bx^2}{x(\tan x - x)} = \frac{(1+a) + (\frac{1}{2} + b)x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{(1+a)x^{-4} + (\frac{1}{2} + b)x^{-2} + \frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}}$$

中間試験問題 B

Theorem (定理 G)

数列 $\{s_n\} = \{s_0, s_1, \ldots\}$ **が実数** σ **に収束するとする．このとき，新しい数列** $\{t_n\}$ **を** $t_n = s_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ **で定義すると，**$\{t_n\}$ **も** σ **に収束する．**

この定理の仮定は $\boxed{\ 1\ }$, **結論は** $\boxed{\ 2\ }$ **であることに注意する．任意の正の数** ε **を一つとる．このとき，仮定から次を満たす番号** N_0 **が存在する：**$\boxed{\ 3\ }$**．このとき** $N = \boxed{\ 4\ }$ **とすれば，**$n \geq N$ **を満たす任意の番号** n **に対して** $\boxed{\ 5\ }$ **が成り立つので結論が得られた．**

- 1:**仮定** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \sigma$; 2: **結論** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} t_n = \sigma$.
- 3: ~~**任意の正の数**~~ $\cancel{\varepsilon}$ ~~**に対して**~~ $n \geq N_0$ **ならば** $|s_n - \sigma| < \varepsilon$.
- 4: $N_0 + 1$; 5: $|t_n - \sigma| < \varepsilon$.

中間試験問題 B

Theorem (定理 H)

数列 $\{a_n\}$ から定まる無限級数 $a_0 + a_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ.

Proof.

第 n 部分和を s_n と書くと $\{s_n\}$ は収束するのでその極限値を σ とする.
このとき定理 G から

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to \sigma - \sigma = 0 \qquad (n \to \infty).$$

- ~~収束値~~: 極限値

中間試験問題 B

Theorem (定理 H)

数列 $\{a_n\}$ から定まる無限級数 $a_0 + a_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．

逆は成立しない: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散する．

定期試験でも「定理 H の逆の真偽」に相当する内容を問います．
是非覚えていただきたいので，この問題を「トラップ」としまして，
配点を -100 点から x 点（x は正の数）とします．

中間試験問題 B

数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ を，各項 q_n が 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のいずれかからなるものとする．このとき，次の級数は収束する：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{10^n}. \tag{$\star$}$$

第 n 部分和を $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{10^k}$ とおくと

- $\{s_n\}$ は単調非減少である．
- $\{s_n\}$ は上に有界である．実際

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{9}{10^k} = 9\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}} = 10\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right) \leq 10.$$

中間試験問題 B

数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ を，各項 q_n が $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ のいずれかからなるものとする．このとき，次の級数は収束する：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{10^n}. \tag{$\star$}$$

有界性の証明で

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{10^n} \leq \cdots \leq 10$$

のような記述は不正解．

- 一般に，無限級数は「数」ではなく「絵」である．
- 級数が収束するとき，はじめて無限級数は「数」になる．
- ここでは，級数 $(\star)$ が「数」となることを証明するのが目標．
- したがって，証明が完了するまでは $(\star)$ は数ではない．
- 数でないものを不等式で比較することはできない．

中間試験問題 B

数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ を，各項 q_n が 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のいずれかからなるものとする．このとき，次の級数は収束する：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{10^n}. \qquad (\star)$$

次は不正解：

$$\frac{q_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n} \quad \text{だが} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{10^n} \quad \text{が収束するので，} (\star) \text{ は収束．}$$

Theorem (命題 8.6)

負でない実数からなる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が各 n に対して $a_n \leq b_n$ をみたしているとする．このとき，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する．

中間試験問題 B

数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ **を，各項** q_n **が** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 **のいずれかからなるものとする．このとき，次の級数は収束する：**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{10^n}. \qquad (\star)$$

この級数の各項は有理数であるが，その和は有理数になるとは限らない．

$$3.14159265358979323\ldots$$

- **有理数**: **有限小数または循環小数．**

参考

Theorem (定理 9.19)

数列 $\{a_n\}$ に対して $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とおくと

- $\alpha < 1$ なら級数 $\sum a_n$ は絶対収束する．
- $\alpha > 1$ なら級数 $\sum a_n$ は発散する．

Theorem (問題 9-3)

数列 $\{a_n\}$ のすべての項が 0 でなく，$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在するとき，

- $\alpha < 1$ なら $\sum a_n$ は絶対収束する．
- $\alpha > 1$ なら $\sum a_n$ は発散する．

- 後者は $a_n \neq 0$ $(n = N, N+1, N+2, \dots)$ でなければ適用できない．
- $\alpha = 1$ のときはこれらの定理では収束が判定できない．

言葉

題意：意味が明確な別の語に置き換えてほしい．

- よって題意が示された：題意 $=$ 結論
- 題意より***が成り立つ：題意 $=$ 仮定
- これは題意を満たす：題意 $=$ 条件?

【題意】 題の意味するところ（広辞苑）

【題】
1. 頭部のしるしをつける所．ひたい．また，巻頭にしるした文字．
2. 書物の名．書名．
3. 詩歌・文章・美術作品などでその主意を短く示すもの．「—を付ける」
4. 問い．解決を求められている事柄．「お—」