微分積分学第二 B (12)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/

2015.01.14

お願い

授業評価にご協力願います

東工大ポータルから

2015年1月13日現在 1/66名

お知らせ

- **中間試験の答案は，数学事務室にて返却しております．**
  受け取っていない方は，本館 3 **階** 332B **までおいでください．**

- **定期試験の予告および持ち込み用紙は，中間試験の答案に添付しています．**
  添付された用紙以外の持ち込みは一切認めません．

- 12 **月** 24 **日に説明したように，定期試験には** **トラップ問題** **を仕掛けます．** **提示資料@** 20141224

Q and A

Q: **テイラー級数はべき級数の一種なのですか？**

A: **はい.**

Q: p. 79, p. 80 **の例** 10.14 **で「**$x = 1$ **で級数** (10.4) **は収束するので」について．こういう問題とくとき（原文ママ：問題を解くとき**?**)「なぜ収束するのか」の理由は自明として略して良いものですか**?

A: 79 **ページの一番下の行に書いてあります．略していません.**

Q: p. 76 **の例** 10.8 (3) **で出てくる“条件収束”は，収束はするものの絶対収束はしない級数に用いられるのですか**?

A: **講義ノート** 71 **ページ.**

Q and A

Q: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とはどういう意味ですか．
$\sqrt[1]{|a_1|}, \sqrt[2]{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots$ の中で一番大きな数という解釈でいいのですか?

Q: $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ ではなくて $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ なのですか?
中間のときまでずっと lim と sup は分けて書くものかと思ってました．これで 1 つの記号ですか．

Q: $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ の sup って何ですか．

A: 定義は講義ノート 65 ページ．1 月 7 日に少々説明した．
$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}$ $\cancel{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}}$ $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$
解釈は不要

Q and A ($\limsup$)

Definition

定義 7.3 **集合 $X \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとは，「任意の $x \in X$ に対して $x \leq M$」をみたす実数 M が存在すること．**
この実数 M のことを X の上界という．

定義 7.5 **実数 α が上に有界な集合 A の上限であるとは**

- **α は A の上界であり，**
- **α より小さい数はいずれも A の上界でない**

こと，すなわち α は A の上界の最小値となることである．

Theorem (実数の連続性)

公理 5.12: **上（下）に有界な単調非減少（増加）数列は収束する．**

定理 7.8: **上に有界な実数の部分集合には上限が存在する．**

Q and A ($\limsup$)

記号： **集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して**

$$\sup A = \begin{cases} A \text{ の上限} & (A \text{ が上に有界のとき}) \\ +\infty & (A \text{ が上に有界でないとき}) \end{cases}$$

定義の準備： **上に有界な数列 $\{b_n\}$ に対して**

- $b_n^+ := \sup\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ **とおく.**
- $\{b_n^+\}$ **は単調非増加数列.**

Definition (定義 9.2)

数列 $\{b_n\}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} b_n^+ & (\{b_n\} \text{ が上に有界なとき}) \\ +\infty & (\{b_n\} \text{ が上に非有界なとき}) \end{cases}$$

Q and A (d'Alembert vs Cauchy-Hadamard)

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (♡) **について**

Theorem (定理 9.19; Cauchy-Hadamard)

$\beta := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$ **とおくと**

- $\beta < 1$ **なら級数** (♡) **は絶対収束する.**
- $\beta > 1$ **なら級数** (♡) **は発散する.**

Theorem (問題 9-3; d'Alembert)

各 $b_n \neq 0$ **で** $\beta := \lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|$ **が存在するとき**

- $\beta < 1$ **なら級数** (♡) **は絶対収束する.**
- $\beta > 1$ **なら級数** (♡) **は発散する.**

Q and A (d'Alembert vs Cauchy-Hadamard)

Q: **絶対収束を判定する方法のうち，**d'Alembert **の方は公比についての式だと見て取れるため，**1 **より大きいか小さいかで判断しているのが納得いくのですが，**Cauchy **の方はどのように理解するとわかりやすいですか．**

Q: **収束判定で「**$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ **でなぜ** a_n **の** n **乗根をとったのかがよくわかりませんでした．教えて下さい．**

A: **公比** r **の等比数列** $a_n = r^n$ **に対して** $\sqrt[n]{|a_n|} = |r|$**．これと比較して収束発散を考えることができる．**

Q and A (d'Alembert vs Cauchy-Hadamard)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(\diamondsuit)$ **について**

Theorem (定理 10.3; Cauchy-Hadamard)

冪級数 $(\diamondsuit)$ **の収束半径は** $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Theorem (定理 10.4; d'Alembert)

各 $a_n \neq 0$ **で** $r = \lim \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ **が存在するとき，収束半径は** r **である．**

$b_n = a_n x^n$ **とすると，**

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Q and A (d'Almbert vs Cauchy-Hadamard)

Q: 収束半径 r の定義「$r = 1/\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ で，なぜ $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ の「逆数」になるのかがよくわかりませんでした．教えて下さい．

A: 定義ではありません．講義ノート 74 ページ

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(\diamondsuit)$ について

Theorem (命題 10.2)

冪級数 $(\diamondsuit)$ の収束半径が r $\Leftrightarrow$

1. $|x| < r$ ならば $(\diamondsuit)$ は絶対収束する．
2. $|x| > r$ ならば $(\diamondsuit)$ は発散する．

$b_n = a_n x^n$ とすると，

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Q and A (d'Alembert vs Cauchy-Hadamard)

Q: $a_n = 0$ となる n が無限個ある級数に対して，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$ を適用できないとありますが，$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|}$ を用いても $a_n = 0$ の場合は r が求められないきがしますが，このとき，収束半径はどのように求めるのですか?

A: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ は負でない実数か $+\infty$ です（確定する）．

Q: 収束半径を求める方法としてコーシーアダマールの定理とダランベールの定理がありますが，ダランベールの定理では r が求まらないことがあり，一方，コーシーアダマールは任意の冪級数で r が求まるので，ダランベールの定理を使う必要性があるのはどんな時ですか．いつもコーシーアダマールを使えばいいのではないでしょうか．

A: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ の収束半径を求めよ．

Q and A (項別微積分)

収束半径 r の冪級数により次のように定める：

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-r < x < r).$$

Theorem

- f **は** $(-r, r)$ **で連続（定理** *10.10***）．**
- **次が成り立つ．ただし右辺の冪級数の収束半径は** r **（定理** *10.12***）．**

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n \qquad (-r < x < r)$$

- **次が成り立つ．ただし右辺の収束半径は** r **（定理** *10.13***）．**

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \qquad (-r < x < r).$$

Q and A (項別微積分)

Q: **授業の最後の方に，項別積分ができるものとして，$f'(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{3m}$ について取り上げていましたが，積分した値は $\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ だと思います．確か講義では余計に $\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ が足されていたと思います．**

A: **余計ではありません．**

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1} &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Abel の定理

Theorem (Abel の定理 10.11)

冪級数 (◇) の収束半径が r で，$x = r$ で収束 $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to r-0} f(x) = f(r)$.

Q: $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{3m+1} = \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$ でなぜ $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{3m+1} x^{3m+1} = \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$ とならないのでしょうか?

A: ご質問の意味が分かりません．$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{3m+1} x^{3m+1}$ は x を含み，$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} f(x)$ は x を含みません．等しくなるとは思えないのですが．

Q and A

問題 10-3: **級数**

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}$$

の和を求めなさい．

Q: **問題** 10-3 **がよく分からないです．** $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{m}=\sum_{m=0}^{\infty}a_n x^n$ **について，収束半径を用いて定理** 10.13 **を使えばいいのですか．**

A: **例** 10.14 **（講義ノート** 79 **から** 80 **ページ）のコピーをすればよい．**