2015 年 1 月 14 日 (2015 年 1 月 14 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 12

お知らせ

- 中間試験の答案は，数学事務室にて絶賛返却中．答案には定期試験の持込用紙が添付されていますので，必ず受け取って下さい．
- 定期試験には「トラップ問題」が含まれます．12 月 24 日の「提示資料」をご覧ください．
- 授業評価アンケートにご協力お願いいたします．

授業に関する御意見

- ときどき字が小さくて読みずらいです．すみません． **山田のコメント：** こちらこそ申し訳ありません．
- (」・ω・」) うー (／・ω・／) にゃー **山田のコメント：** にゃあ
- メェー（羊の絵） **山田のコメント：** はい. . .

質問と回答

質問： p. 83, 2, 3 行目の $\leqq$ は $0 < x < 1$ ならば $<$ でも問題ないですよね? **お答え：** そのとおりです．

質問： 例題で出てくる収束半径はほとんど 1 か 0 なのは何故ですか． **お答え：** たまたま，と思って下さい．

質問： p. 79, p. 80 の例 10.14 で「$x = 1$ で級数 (10.4) は収束するので」について．こういう問題とくとき（原文ママ：問題を解くとき?)「なぜ収束するのか」の理由は自明として略して良いものですか?

お答え： 79 ページの一番下の行に書いてあります．略していません．

質問： 絶対収束を判定する方法のうち，d'Alembert の方は公比についての式だと見て取れるため，1 より大きいか小さいかで判断しているのが納得いくのですが，Cauchy の方はどのように理解するとわかりやすいですか．

お答え： Cauchy-Hadamard ですね．$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とすると，$\sqrt[n]{|a_n|}$ は "大体" r より小さいので，$|a_n| \leqq r^n$．もうすこしきちんと言います：$b_n := \sqrt[n]{|a_n|}$，$b_n^+ := \sup\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots\}$ とおけば，上極限の定義から $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n^+$ となる．ここで，$r < 1$ のとき，$r < r' < 1$ となる r' をひとつとり，$\varepsilon = r' - r > 0$ とすると，「$n \geqq N$ ならば $r - \varepsilon < b_n^+ < r + \varepsilon = r'$」をみたす番号 N が存在する（極限の定義）．したがって，$n \geqq N$ のとき，$|a_n| = {b_n}^n \leqq (b_n^+)^n < (r')^n$ となり，十分先の方では，公比 $r' < 1$ の等比級数で上からおさえられる．

質問： 収束判定で「$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ でなぜ a_n の n 乗根をとったのかがよくわかりませんでした．教えて下さい．

お答え： 上の質問と回答参照．なお $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ ではなく $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

質問： 収束半径 r の定義「$r = 1/\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ で，なぜ $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ の「逆数」になるのかがよくわかりませんでした．教えて下さい．

お答え： 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が 1 より小さくなる x の範囲は?

質問： 例題で「$\frac{(-1)^m}{3m+1} x^{3m+1} = b_m$」としてダランベールの定理を用いていましたが，なぜ変数 x も含めて b_m とおけるのかがよく分かりませんでした．教えてください．

お答え： おいちゃだめ?「$\sum b_m$ が収束するような x の範囲を求めよ」という問題と思いましょう．

質問： ダランデール（原文ママ：ダランベールのことか）の判定なので $= 1$ になったときの一般的な判定法は存在しますか? **お答え：** ラーベの判定法などでぐぐってみてください．

質問： 収束半径を求める方法としてコーシーアダマールの定理とダランベールの定理がありますが，ダランベールの定理では r が求まらないことがあり，一方，コーシーアダマールは任意の冪級数で r が求まるので，ダランベールの定理を使う必要性があるのはどんな時ですか．いつもコーシーアダマールを使えばいいのではないでしょうか．

お答え： もちろんそうです．で，たとえば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ の収束半径が無限大であることを，コーシーアダマールを用いて示してください．つぎに，ダランベールを用いて示してください．どちらが簡単ですか?

質問： $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とはどういう意味ですか． $\sqrt[1]{|a_1|}$, $\sqrt[2]{|a_2|}$, $\sqrt[3]{|a_3|}$,...， $\sqrt[n]{|a_n|}$,... の中で一番大きな数という解釈でいいのですか? **お答え：**定義は講義ノート 65 ページ．1 月 7 日の講義で少々説明した．なお「解釈」は不要．

質問： $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ ではなくて $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ なのですか? 中間のときまでずっと lim と sup は分けて書くものかと思ってました．これで 1 つの記号ですか． **お答え：**これで 1 つの記号です．講義ノート 65 ページを見よ．

質問： $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ の sup って何ですか． **お答え：**$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}$ です．講義ノート 65 ページです．

質問： $a_n = 0$ となる n が無限個ある級数に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$ を適用できないとありますが，$\frac{1}{r} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ を用いても $a_n = 0$ の場合は r が求められないきがしますが，このとき，収束半径はどのように求めるのですか? **お答え：**$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ は存在します（講義ノート 65 ページ）．

質問： (11.2) $n \geqq M$ ならば $|\sigma_n - X| < \frac{\varepsilon}{4}$ とありますが，なぜ $\frac{\varepsilon}{4}$ でおさえられるのか分かりません．

お答え： σ_n が X に収束することから，「任意の正の数 ε' に対して，次をみたす番号 N が存在する：$n \geqq N$ ならば $|\sigma_n - X| < \varepsilon'$」このことが成り立っていると仮定されているのだから，$\varepsilon' = \varepsilon/4$ とおいてやればよい．

質問： p. 76 の例 10.8 (3) で出てくる “条件収束” は，収束はするものの絶対収束はしない級数に用いられるのですか?

お答え： 講義ノート 71 ページ．

質問： テイラー級数はべき級数の一種なのですか？ **お答え：**はい．

質問： 収束するべき級数を項別微分した後積分すると，和が求まりました．直感的に微分した後積分すると，元の形に戻るのではないかと思いました．なぜ，この操作を行なうと和が求まるのでしょうか．

お答え： もちろん，微分して積分すれば元に戻ります．一方，この例題では，もとの級数を項別微分したものの和が簡単にわかるので，もとの級数の和がわかる，という仕組みです．

質問： 授業の最後の方に，項別積分ができるものとして，$f'(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{3m}$ について取り上げていましたが，積分した値は $\frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ だと思います．確か講義では余計に $\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ が足されていたと思います．

お答え： 違います．板書する際に少しコメントしたのですが，積分は定積分で，

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

質問： 問題 10-3 がよく分からないです． $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{m} = \sum_{m=0}^{\infty} a_n x^n$ について，収束半径を用いて定理 10.13 を使えばいいのですか． **お答え：**講義で問題 10-4 を説明しました．それと全く同じことをやってごらんなさい．

質問： 講義資料 p. 85 で定理 11.6 の B が成り立つ理由（いい加減バージョン）と（ちょっと正確バージョン）とありますが，この 2 つの差は近似の精度でしょうか?

お答え： いいえ．同じ 2 次の項で比較しているのだから近似の精度は同じ．いい加減バージョンの「ずっと小さいので十分小さい h の範囲では無視して良い」の部分をきちんと評価したのがちょっと正確バージョン．

質問： $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{3m+1} = \lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1)$ でなぜ $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{3m+1} x^{3m+1} = \lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1)$ とならないのでしょうか?

お答え： $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{3m+1} x^{3m+1}$ は x を含み，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)$ は x を含みません．等しくなるとは思えないのですが．

提出遅れの質問と回答

質問： 級数 (8.1) が (1) 収束するとは，式 (8.2) で得られる数列 $\{s_n\}$ が (2) 収束することである．とありますが，1 つ目に出てきた「収束する」と 2 つ目にでてきた「収束する」では意味が少し異なっているのでしょうか? 2 つ目の「収束する」には「$n \to \infty$ とした際」という言葉が隠れているのですか?

お答え： 「収束」という語自体は意味がありません．「数列が収束する」「級数が収束する」というように使います．前者を先に定義して，それを用いて後者の定義をしている，というのが講義ノート 8 の筋道．なお，数列の収束で “$n \to \infty$” 以外の状況はないと思いますので，単に「数列が収束」と言います．