微分積分学第二 B (13)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/

2015.01.21

お願い

授業評価にご協力願います

東工大ポータルから

2015年1月20日現在 2/66名

集まりが悪いので中の人不機嫌

お願い 2

東工大の教育改革に関する web アンケート

http://www.titech.ac.jp/enrolled/news/2015/029558.html

こちらも非常に重要な調査です．

お手数をおかけいたしますが，ご協力お願いいたします．

お知らせ

- 中間試験の答案は，数学事務室にて返却しております．
受け取っていない方は，本館 3 階 332B までおいでください．
- 定期試験の予告および持ち込み用紙は，中間試験の答案に添付しています．
添付された用紙以外の持ち込みは一切認めません．
- 12 月 24 日に説明したように，定期試験にはトラップ問題を仕掛けます．提示資料@ 20141224
- 提出物の受付は今回で最後になります．ご協力ありがとうございました．

Q and A

Q: **ランダウの大文字の O の記号の定義は，**

$$g \in O(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{g(n)}{f(n)} \right| = c \qquad (c \text{ は定数})$$

であってますか?

A: **変数 n の変域は自然数ですね．$n \to \infty$ のときに $|f|$, $|g|$ が無限大に発散する場合，という文脈でしょうか．ただしいと思います．なお，この授業では $\overline{\lim}$ のかわりに $\limsup$ を用いています．**

Q and A

Q: 最近，板書を英語でとっているのですが，収束を diverge と書くと知りました．これはベクトルの方の div と関連があるのでしょうか?

A: 収束は diverge ではなく converge です．Diverge は発散．覚えなおしましょう．ベクトル場の divergence も（数列の発散とは意味が違いますが）日本語では発散ですね．

Q: アーベルの定理の証明などは，何となく意味がわかればよいのか? 自分でできなければならないのか．

A: 何となくで結構．人の名前の付いている定理だから，証明には自明でないアイディアが必要．この定理が正しいということ，項別微積分の定理から直接は導かれないことを知っていれば十分です．

Q and A

Q: $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$ という事実を試験の答案で証明なしに使ってよいのですか．

A: 文脈によりますが，証明が必要ならそれを陽に要求します．証明なしで使えという場合は，問題用紙にこの定理を記しておきます．

Q: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ の収束半径をコーシーアダマールを用いて求めるときに，$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{\ln 1 + \cdots + \ln n}{n}$ という等式を使っていましたが，右辺はどうやったら出てくるのでしょうか．

A: 対数法則．

Q and A

Q: **関数** $f(x)$ **が** $x = a$ **で最大値をとることを示したいときは，すべての** $x \in \mathbb{R}$ **について** $f(a) \geq f(x)$ **が成り立つことを示せばよいのでしょうか**?

A: **「定義域に含まれるすべての** x **について」ですね．**

Q: **定義** 11.4 **で極大値をとるとは，**“a **に十分近い** x **に対して** $f(x) < f(a)$ **が成り立つ**” **ことだと書いてありますが，**“**十分近い**” **必要があるのはどうしてですか**? ε **は正の実数と定められているだけで，**“0 **に十分近い正の実数**” **とは書いてありません**. . . **.**

Q and A (極値)

Definition (定義 11.4)

一変数関数 f が a で極大値 (極小値) をとるとは，次を満たす正の実数 ε が存在することである：f の定義域に含まれ，かつ $0 < |x - a| < \varepsilon$ を満たす任意の x に対して，$f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$ が成り立つことである．

Q: ε **は正の実数と定められているだけで，**"0 **に十分近い正の実数**" **とは書いてありません**. . . .

A: **「十分に近い」近さの尺度が** ε**．**
考えている関数によって，距離が 100 **未満なら十分に近いと思うこともでるでしょうし，**0.1 **未満までしぼらなければならないこともあるでしょう．**
いずれの場合にも，そのような「尺度が存在する」わけで，それを「十分近い」と表しています．

Q and A

Q: **定理** 11.6 **の** B **も逆が成立しないのですか**? (A **の対偶としたら**)

A: **もちろん．対偶の逆は「裏」というやつですね．**

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{オリジナル} & & \textbf{逆} \\
P \Rightarrow Q & \cdots & Q \Rightarrow P \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
(\mathrm{not}P) \Rightarrow (\mathrm{not}Q) & \cdots & (\mathrm{not}Q) \Rightarrow (\mathrm{not}P) \\
\textbf{裏} & & \textbf{対偶}
\end{array}
$$

Q: **定理** 11-6 **の** A–C **にあてはまらないような関数はありますか**? **また，その場合はどのように判定すればいいのでしょうか**?

A:

Q and A

Theorem (定理 11.6)

関数 f は $x = a$ を含む開区間で C^∞-級とする

A: $f(x)$ が $x = a$ で極値（極大値または極小値）をとるならば，$f'(a) = 0$ である．

B: (A の対偶) $f'(a) \neq 0$ ならば，$f(x)$ は $x = a$ で極大値も極小値もとらない．

C: $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)$ が成り立つならば $f(x)$ は $x = a$ で極小値（極大値）をとる．

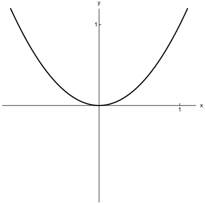
Q: 定理 11-6 の A–C にあてはまらないような関数はありますか? また，その場合はどのように判定すればいいのでしょうか?

A: $f(x) = x^p$ $(p > 2)$．1 月 14 日の講義の最後に少しコメントしました．

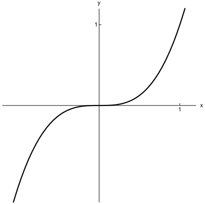
Q and A

Q: **定理** 11-6 **の** A–C **にあてはまらないような関数はありますか**? **また，その場合はどのように判定すればいいのでしょうか**?

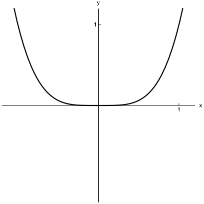
A: $f(x) = x^p \ (p > 2)$.



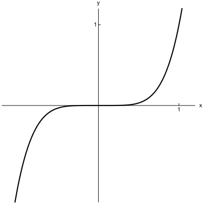
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$



$f(x) = x^4$



$f(x) = x^5$

Q and A (テイラーの定理と極値判定)

Q: **定理** 11-6 **の** A–C **にあてはまらないような関数はありますか**? **また，その場合はどのように判定すればいいのでしょうか**?

Theorem (♡)

f は a を含む開区間で C^∞-級で，整数 n (≥ 2) に対して次を満たすとする：

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \qquad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

a: **n が奇数なら f は a で極値をとらない**

b1: **n が偶数で $f^{(n)}(a) > 0$ なら f は a で極小値をとる．**

b2: **n が偶数で $f^{(n)}(a) < 0$ なら f は a で極大値をとる．**

Theorem ♡ の証明（準備）

仮定：

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \qquad m := f^{(n)}(a) > 0.$$

Theorem (テイラーの定理 3.1)

f が a を含む開区間で C^∞-級とするとき，

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)$$

とおくと $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0.$

仮定から

$$f(a+h) - f(a) = \frac{m}{n!}h^n + R_{n+1}(h), \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0.$$

Theorem ♡ の証明（いい加減バージョン）

$$\boxed{f(a+h)-f(a)=\frac{m}{n!}h^n+R_{n+1}(h), \quad \lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0.} \quad (m>0). \quad (*)$$

h が 0 に十分近いとき，
$R_{n+1}(h)$ は $(*)$ 右辺第 1 項にくらべて十分に小さいので近似式

$$f(a+h)-f(a) \doteqdot \frac{m}{n!}h^n \qquad (m>0) \qquad (**)$$

が成り立つ．

- n が奇数のとき，$(**)$ の右辺は h と同じ符号をもつので $f(a+h)-f(a)$ は a の前後で符号を変える．
  すなわち f は a で極値をとらない．
- n が偶数のとき，$(**)$ の右辺は符号をかえず，$h \neq 0$ なら正：
  十分小さい $h\ (\neq 0)$ に対して $f(a+h)-f(a)>0$．
  すなわち f は a で極小値をとる．

Theorem ♡ の証明（ちょっと正確バージョン）

$$\boxed{f(a+h)-f(a)=\frac{m}{n!}h^n+R_{n+1}(h),\quad \lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0.}\quad (m>0).\quad (*)$$

Definition (関数の極限の定義)

$$\lim_{h\to 0}F(h)=0 \qquad \Leftrightarrow$$

任意の正の数 ε **に対して，**

$0<|h|<\delta$ **ならば** $|F(h)|<\varepsilon$ **となるような正の数** δ **がとれる．**

$\lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0$ **だから，**

$$0<|h|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}\right|<\frac{m}{2n!}$$

となる δ **がとれる．**

Theorem ♡ の証明（ちょっと正確バージョン2; n：奇数）

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a+h)-f(a)=\dfrac{m}{n!}h^n+R_{n+1}(h), \\ 0<|h|<\delta \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{R_{n+1}(h)}{h^n}\right|<\dfrac{m}{2n!}. \end{array}} \qquad (*)$$

- $0<h<\delta$ **のとき**：$R_{n+1}(h)\geq -|R_{n+1}(h)|>-\dfrac{m}{2n!}h^n$ **だから**

$$f(a+h)-f(a)>\frac{m}{n!}h^n-\frac{m}{2n!}h^n=\frac{m}{2n!}h^n>0.$$

- $-\delta<h<0$ **のとき**：$R_{n+1}(h)\leq|R_{n+1}(h)|<-\dfrac{m}{2n!}h^n$ **だから**

$$f(a+h)-f(a)<\frac{m}{n!}h^n-\frac{m}{2n!}h^n=\frac{m}{2n!}h^n<0.$$

すなわち f は a で極値をとらない．

Theorem ♡ の証明（ちょっと正確バージョン 2; n：偶数）

$$\boxed{\begin{aligned} & f(a+h)-f(a)=\frac{m}{n!}h^n+R_{n+1}(h), \\ & 0<|h|<\delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}\right|<\frac{m}{2n!}. \end{aligned}} \qquad (*)$$

- $|h|<\delta$ **のとき**：$R_{n+1}(h)\geq -|R_{n+1}(h)|>-\dfrac{m}{2n!}h^n$ **だから**

$$f(a+h)-f(a)>\frac{m}{n!}h^n-\frac{m}{2n!}h^n=\frac{m}{2n!}h^n>0.$$

すなわち f は a で極小値をとる．

Q and A

Q: **定理** 11.6 **の** B **が成り立つ理由のいいかげんバージョンを示したのはなぜですか**? **ちょっと正確バージョンだけあれば十分なのではないかと思いました．**

Q: **証明の "いい加減バージョン" と "しっかりした** (?) **バージョン" は何が異なるのでしょうか**?

A: Theorem ♡ **の** 2 **つの説明を比較せよ．**

Q: p. 85 **の定理** 11.6 **の正確バージョンに，**$|h| < \delta$ **ならば** $|R_2(h)/(mh)| < 1/2$ **とありますが，**h **の範囲を広くすればするほど** $R_2(h)/(mh)$ **の範囲も広くなりますか．もしそうなるのであれば** $R_2(h)$ **は** h **の** 2 **次以上の関数と考えてもよいですか**?

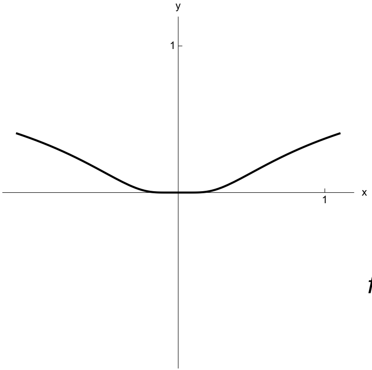
A: **前半：そうとは限りません．例えば** $f(x) = x$ $(a = 0)$**．**
後半：それが「剰余項の性質」である，ということをテイラーの定理を扱ったときに述べました．「もしそうなるのであれば」と言っている意味がよくわかりませんが．

Q and A

Q: **問題** 11-8 **がよくわかりません．**

問題 11-8: **定理** 11.6 **の状況で** $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ **のときはなにが起きているか．**

A: Theorem ♡.



$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$