2015 年 1 月 21 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 13

お知らせ

- 中間試験の答案は，数学事務室にて絶賛返却中．答案には定期試験の持込用紙が添付されていますので，必ず受け取って下さい．
- 定期試験には「トラップ問題」が含まれます．12 月 24 日の「提示資料」をご覧ください．
- 授業評価アンケートにご協力お願いいたします．
- 「東工大の教育改革に関する web アンケート」
  http://www.titech.ac.jp/enrolled/news/2015/029558.html
  こちらも非常に重要な調査です．お手数をおかけいたしますが，ご協力お願いいたします．

前回までの訂正

- （板書）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n/n$ の収束半径を求める式で

$$\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n+2}x^n}\right| \qquad\Rightarrow\qquad \left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n+1}x^n}\right|$$

- 講義資料 12, 1 ページ，質問と回答の 3 行目：p. 79, p. 89 ⇒ p. 79, p. 80
- 講義ノート 85 ページ，3 行目：テイラーの定理?? ⇒ テイラーの定理 3.1
- 講義ノート 91 ページ，下から 4 行目：Hess $f(a,b) := \dots$ ⇒ ただし，Hess $f(a,b) := \dots$
- 講義ノート 93 ページ，下から 3 行目以降：
  このとき，$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1,\dots,a_n) \in D$ におけるテイラーの定理は，$\dots$ とかける．
  ⇒ このとき，定理 12.1 の証明の真似をすれば，$\dots$ を得る．

質問と回答

質問： 定理 11.6 の B が成り立つ理由のいいかげんバージョンを示したのはなぜですか? ちょっと正確バージョンだけあれば十分なのではないかと思いました．

質問： 証明の “いい加減バージョン” と “しっかりした (?) バージョン” は何が異なるのでしょうか?

お答え： 「剰余項はその手前の項にくらべて十分に小さいのだから，無視して良い」と言い切ってしまったのがいい加減バージョン，その小ささをきちんと評価したのがちょっと正確バージョン．ちょっと正確バージョンで小ささを評価するには “ε” に相当する値を適当にとらなければならず（ここでは 1/2 にとった）天下りかつ技巧的なことが必要．しかし「おおざっぱにいえばこんなこと」ということを知っていると，同様の議論を他で行うときによい指針になるはず．

質問： p. 85 の定理 11.6 の正確バージョンに，$|h| < \delta$ ならば $|R_2(h)/(mh)| < 1/2$ とありますが，h の範囲を広くすればするほど $R_2(h)/(mh)$ の範囲も広くなりますか．もしそうなるのであれば $R_2(h)$ は h の 2 次以上の関数と考えてもよいですか?

お答え： 前半：そうとは限りません．たとえば $f(x) = x$ ($a = 0$ のとき) を考えてご覧なさい．$R_2(h)$ は恒等的に 0 になるので，h の範囲を広くしても $R_2(h)$ の範囲は広くなりません．後半：それが「剰余項の性質」である，という

ことをテイラーの定理を扱ったときに述べました.「もしそうなるのであれば」と言っている意味がよくわかりませんが.

質問： 関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値をとることを示したいときは，すべての $x \in \mathbb{R}$ について $f(a) \geqq f(x)$ が成り立つことを示せばよいのでしょうか?

お答え： 「定義域に含まれるすべての x について」ですね.

質問： 定義 11.4 で極大値をとるとは，“a に十分近い x に対して $f(x) < f(a)$ が成り立つ” ことだと書いてありますが，“十分近い” 必要があるのはどうしてですか? ε は正の実数と定められているだけで，“0 に十分近い正の実数” とは書いてありません....

お答え： むしろ「十分に近い」近さの尺度が ε なのです．“距離 ε 未満を十分に近い” と思えば，ということです．考えている関数によって，距離が 100 未満なら十分に近いと思うこともでるでしょうし，0.1 未満までしぼらなければならないこともあるでしょう．いずれの場合にも，そのような「尺度が存在する」わけで,「十分近い」と表しています．もちろんこれは厳密な言明ではなく（喩え話です)，正確な意味は定義 11.4 本文です.

質問： 最近，板書を英語でとっているのですが，収束を diverge と書くと知りました．これはベクトルの方の div と関連があるのでしょうか?

お答え： 収束は diverge ではなく converge です．Diverge は発散．覚えなおしましょう．ベクトル場の divergence も（数列の発散とは意味が違いますが）日本語では発散ですね.

質問： $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \alpha$ という事実を試験の答案で証明なしに使ってよいのですか.

お答え： 文脈によりますが，証明が必要ならそれを陽に要求します．証明なしで使えという場合は，問題用紙にこの定理を記しておきます.

質問： アーベルの定理の証明などは，何となく意味がわかればよいのか? 自分でできなければならないのか.

お答え： 何となくで結構．人の名前の付いている定理だから，証明には自明でないアイディアが必要．この定理が正しいということ，項別微積分の定理から直接は導かれないことを知っていれば十分です.

質問： ランダウの大文字の O の記号の定義は,

$$g \in O(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{g(n)}{f(n)} \right| = c \qquad (c \text{ は定数})$$

であってますか?

お答え： 変数 n の変域は自然数ですね．$n \to \infty$ のときに $|f|$, $|g|$ が無限大に発散する場合，という文脈でしょうか. ただしいと思います．なお，この授業では $\overline{\lim}$ のかわりに $\limsup$ を用いています.

質問： $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ の収束半径をコーシーアダマールを用いて求めるときに，$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{\ln 1 + \dots + \ln n}{n}$ という等式を使っていましたが，右辺はどうやったら出てくるのでしょうか.

お答え： 対数法則.

質問： 定理 11-6 の A–C にあてはまらないような関数はありますか? また，その場合はどのように判定すればいいのでしょうか?

お答え： $f(x) = x^p$ $(p > 2)$．1 月 14 日の講義の最後に少しコメントしました.

質問： 定理 11.6 の B も逆が成立しないのですか? (A の対偶としたら)

お答え： もちろん．対偶の逆は「裏」というやつですね.

質問： 問題 11-8 がよくわかりません.

お答え： 1 月 14 日の講義の最後にすこしコメントしたこと．今回もう一度説明します.