微分積分学第二 B (14)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc2/

2015.01.28

お願い

授業評価にご協力願います

東工大ポータルから

2015年1月26日現在 6/66名

増えましたがまだまだ

お願い 2

東工大の教育改革に関する web アンケート

http://www.titech.ac.jp/enrolled/news/2015/029558.html

こちらも非常に重要な調査です．

お手数をおかけいたしますが，ご協力お願いいたします．

お知らせ

- 中間試験の答案は，数学事務室にて絶賛返却中．
  受け取っていない方は，本館 3 階 332B までおいでください．
- 定期試験の予告および持ち込み用紙は，中間試験の答案に添付しています．
  添付された用紙以外の持ち込みは一切認めません．
- 12 月 24 日に説明したように，定期試験にはトラップ問題を仕掛けます．提示資料@ 20141224
- 今学期もご聴講ありがとうございました ♡

Q and A

Q: **数学はキライだけど，先生のことは大好きです** ♡♡♡

A: **どう答えればいいんだろう．**
「君はキライだけど数学は大好きです ♡♡♡**」?**

Q: **プリント定理** 12.1 **の証明がよくわからなかったので教えて下さい．**

A: **どのあたりが**?

Q: 12.4 **の内容が理解できませんでした．**

A: **そうですか．**

Q: **そもそもなぜ** ε-δ **論法で** ε **と** δ **を用いたのでしょうか．また，答案を書くときに，**ε **と** δ **を他の文字に置き換えても良いのでしょうか**?

A: **前半：**Wikipedia **にそれらしきことが：**error **と** distance**．**
後半：もちろんきちんと説明してあれば問題ありません．
試験などでは「任意の正の数 A **に対して正の数** B **が存在して」などでもよいですが，世間で使うと「常識を知らない人」と思われます．**

Q and A

Q: 3 変数関数の極値の判定も 2 変数と同じようにやるのですか．

Q: 4 変数以上の極値判定でも固有値の符号を使うのですか?

A: 講義ノート 95 ページ．

Q: 二次形式の勉強したいです．大学で推奨された教科書はわかりにくいです．何かこう，わりとかみ砕いた表現をつかっている線形の教科書はごぞんじないですか?

A: いくつか出ていると思いますが，それがあなたにとってわかりやすいかどうかは山田には判定できません．書店や図書館で，最低 10 冊は眺めてご覧なさい．

Q and A

Q: **講義資料** p. 97 **の** 1) C^r-**級なら結論として得られる関数も** C_r-**級になる（原文ママ：**C^r-**級のことか）．はなぜ成立するのですか．**
p. 97 **の定理** 13.1 **で“ただひとつ”と限定できるのはなぜですか．**

A: **前半：証明はかなり面倒くさい．ここでは扱わない．**
後半：ということが証明できるから．前半の事実よりは難しくないが，やはりこの講義では扱わない．

Q: **常微分方程式は何が常なんですか**? **偏微分方程式もあるんですか**?

A: **前期の講義ノート** 8.

Q and A

Q: **定理** 12.5 **の証明に書いてある「**h^2+k^2 **が十分小さいときは** $|R_3(h,k)|$ **は** $|\varphi(h,k)|$ **に比べて十分小さい」がいまいちよくわからないのですが，どういうことですか**?

A: **いまいち，というのはどの程度のことでしょうか．一変数関数の極値判定条件の説明の「いい加減バージョン」と「ちょっと正確バージョン」を比較してみてください（**1 **月** 21 **日の講義です）．それのアナロジー（類似）で理解できませんか**?

Q: $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2}=0$ **というのは** $R_3(h,k)=o(h^2+k^2)$ **と表せますか**?

A: **はい．**

Q and A

Q: p. 90, **定理** 12.1 **の証明の** $F'(0)$ **と** $F''(0)$ **と** $F'''(\theta)$ **が並んで書かれている所** $F'''(\theta)$ **は** $F'''(0)$ **のミスではなく「**θ**」ですか**? **あと，この** $F^{(n)}(0)$ **の式は** $(x+y)^n$ **を展開した式の形と似てると思ったのですが，**$(x+y)^n$ **の展開式と同じような形になると思っても大丈夫ですか**?

A: **前半：もし** 0 **だとしたら** $(0<\theta<1)$ **は何**?
後半：「$(x+y)^n$ **の展開式」は「二項定理」といいます．こういった方が大人な感じがします．で，**2 **変数関数のテイラーの定理の** n **次の項は**

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}}(a,b)h^m k^{n-m}.$$

Q: 2 **変数関数をテイラー展開により展開すると，変数分離ができるということですか**?

A: **「変数分離」とはどういうことを指しているのでしょうか．**

Q and A

Q: Hesse **行列を見ているとヤコビ行列を思いだしました．この** 2 **つにはなにか関係があるのでしょうか．**

A: **関数** f **に対して** $\operatorname{grad} f\colon (x, y) \mapsto (f_x, f_y)$ **という** $\mathbb{R}^2$ **の領域から** $\mathbb{R}^2$ **への写像** $\operatorname{grad} f$ **のヤコビ行列がヘッセ行列．**

Q: **ヘッセ行列（**p 91 (12.3)) **について，これをヘッセ行列というのは** 2 **次のときだけですか**? 3 **次以降のときもこう呼ぶのですか**?

A: **後者です．**

Q and A

Q: **事実** 12.7 **において，**2 **次形式が** $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ **の右辺は** $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ **という意味ですか**? **また，** $x_i x_j = x_j x_i$ **だから** $a_{ij} = a_{ji}$ **が等しくなるように（原文ママ；** a_{ij} **と** a_{ji} **が等しくなるように，ですね）按分することができるとは，具体的にどのようなことを言っているんですか**?

A: **前半：はい．後半：一般に** $\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ **に対して** $\tilde{a}_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ **とすると，** $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ **で，かつ** $\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_i x_j$ **となる．したがって最初から** $a_{ij} = a_{ji}$ **となる場合のみを考えればよい．**

Q and A

Q: **定理** 12.5 **において，**$\det \mathrm{Hess}\, f(a, b) = 0$ **のときは判定できないと授業でやりましたが，**Taylor **の定理で** 3 **次以上の項まで出していくと求められるようになるということですか**?

A: 2 **次の項が残っていてかつ** $\mathrm{Hess}\, f$ **が正則行列でない場合はちょっと複雑です．**2 **次の項が影響する方向と** 3 **次以上の項が影響する方向にわかれますので．一般論として定理にするのは困難です**

Q: $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ **は** $(x, y) = (0, 0)$ **で極値となるか，**Hesse **行列で判定できない場合，他のやり方で極値かどうか調べる方法はありますか．**

A: **各個撃破．講義で少しコメントします．**

復習

Problem

関数

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$$

の極値を求めよ．

$$f_x = 4x^3 - 3x^2 + 2xy^2 = x(4x^2 - 3x + 2y^2), \quad f_y = y(4y^2 + 3y + 2x^2)$$

なので

$$f_x = f_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (x = 0 \text{ or } 4x^2 - 3x + 2y^2 = 0) \\ \textit{and} \\ (y = 0 \text{ or } 4y^2 + 3y + 2x^2 = 0) \end{array} \right.$$

復習

Problem

関数 $f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4-x^3+y^3$ **の極値を求めよ．**

$$f_x=f_y=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=y=0, & \text{or} \\ x=0 \text{ and } 4y^2+3y+2x^2=0, & \text{or} \\ y=0 \text{ and } 4x^2-3x+2y^2=0, & \text{or} \\ 4y^2+3y+2x^2=0 \text{ and } 4x^2-3x+2y^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y)=(0,0), \quad \left(0,-\frac{3}{4}\right), \quad \left(\frac{3}{4},0\right), \quad \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

復習

Problem

関数 $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ **の極値を求めよ．**

$$f_x = f_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), \quad \left(0, -\frac{3}{4}\right), \quad \left(\frac{3}{4}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

これ以外の点では極値をとらない．
したがってこの 4 点で極値をとるかどうかを調べればよい．

Theorem (定理 12.4)

f **が** $(a,b) \in D$ **で極値をとるならば** $f_x(a,b) = 0$ **かつ** $f_y(a,b) = 0$.

復習

Problem

関数 $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ **の極値を求めよ．**

$$f_x = f_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), \quad \left(0, -\tfrac{3}{4}\right), \quad \left(\tfrac{3}{4}, 0\right), \quad \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right).$$

$\underline{(x,y) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\ \textbf{について：}}$

$$\operatorname{Hess} f\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$$

$$= \begin{pmatrix} 12x^2 - 6x + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 12y^2 + 6y + 2x^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \det \operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$$

復習

Problem

関数 $f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4-x^3+y^3$ **の極値を求めよ．**

$$f_x=f_y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)=(0,0), \quad \left(0,-\tfrac{3}{4}\right), \quad \left(\tfrac{3}{4},0\right), \quad \left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right).$$

$(x,y)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ **について：**

$$\det \operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}<0$$

したがって f **は** $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ **で極値をとらない．**

Theorem (定理 12.5)

f **が** $(a,b)\in D$ **において** $f_x=f_y=0$ **をみたしているとき，**
$\det \operatorname{Hess} f(a,b)<0$ **ならば** $f(x,y)$ **は** $(x,y)=(a,b)$ **で極値をとらない．**

復習

Problem

関数 $f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4-x^3+y^3$ **の極値を求めよ．**

$$f_x=f_y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)=(0,0), \quad \left(0,-\tfrac{3}{4}\right), \quad \left(\tfrac{3}{4},0\right), \quad \left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right).$$

<u>$(x,y)=(0,-\frac{3}{4})$ **について：**</u>

$$\operatorname{Hess} f\left(0,-\tfrac{3}{4}\right)=\begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

したがって f **は** $(0,-\frac{3}{4})$ **で極小値** $-\frac{27}{256}$ **をとる．**

Theorem (定理 12.5)

f **が** $(a,b)\in D$ **において** $f_x=f_y=0$ **をみたしているとき，**
$\det \operatorname{Hess} f(a,b)>0$ **かつ** $f_{xx}(a,b)>0$ **ならば** f **は** (a,b) **で極小値をとる．**

復習

Problem

関数 $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ **の極値を求めよ．**

$$f_x = f_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), \quad \left(0, -\tfrac{3}{4}\right), \quad \left(\tfrac{3}{4}, 0\right), \quad \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right).$$

$(x,y) = (\frac{3}{4}, 0)$ **について：**

$$\operatorname{Hess} f\left(\tfrac{3}{4}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

したがって f **は** $(\frac{3}{4}, 0)$ **で極小値** $-\frac{27}{256}$ **をとる．**

Theorem (定理 12.5)

f **が** $(a,b) \in D$ **において** $f_x = f_y = 0$ **をみたしているとき，**
$\det \operatorname{Hess} f(a,b) > 0$ **かつ** $f_{xx}(a,b) > 0$ **ならば** f **は** (a,b) **で極小値をとる．**

復習

Problem

関数 $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ **の極値を求めよ．**

$$f_x = f_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), \quad \left(0, -\tfrac{3}{4}\right), \quad \left(\tfrac{3}{4}, 0\right), \quad \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right).$$

$\underline{(x,y) = (0,0)\ \text{について：}}$

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det \operatorname{Hess} f(0,0).$$

このとき

$$f(x,0) = -x^3 + x^4$$

は $x > 0$**，**$x < 0$ **で符号を変えるので**

f **は** $(0,0)$ **では極値をとらない．**

復習

Problem

関数 $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ **の極値を求めよ.**

$(x,y) = \left(0, -\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ **で極小値** $-\frac{27}{256}$ **をとる.**