2015 年 1 月 28 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 14

お知らせ

- 中間試験の答案は，数学事務室にて絶賛返却中．答案には定期試験の持込用紙が添付されていますので，必ず受け取って下さい．
- 定期試験には「トラップ問題」が含まれます．12 月 24 日の「提示資料」をご覧ください．
- 授業評価アンケートにご協力お願いいたします．
- 「東工大の教育改革に関する web アンケート」
  http://www.titech.ac.jp/enrolled/news/2015/029558.html
  こちらも非常に重要な調査です．お手数をおかけいたしますが，ご協力お願いいたします．
- 今学期もご聴講ありがとうございました．Good Luck!

前回までの訂正

- 講義ノート 97 ページ，6 行目：

$$\dot{x}_j(t) = f_j\bigl(t; x_1(t), \dots, x)_n(t)\bigr) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_j(t) = f_j\bigl(t, x_1(t), \dots, x)_n(t)\bigr)$$

実は t とそれ以降の変数は少し役割が違うので「区切り」をつけるためにセミコロンにしていたのですが，(13.1) 式で t と $\boldsymbol{x}$ の間がコンマなので，統一した方がいいですね．

授業に関する御意見

- 一年間ありがとうございました！（多分期末は書いている時間ないと思うので（笑））　**山田のコメント：** こちらこそ．
- 線形がわからん. . . 　**山田のコメント：** 承りました（承っただけです）．

質問と回答

質問： 定理 12.5 において，$\det \operatorname{Hess} f(a,b) = 0$ のときは判定できないと授業でやりましたが，Taylor の定理で 3 次以上の項まで出していくと求められるようになるということですか?

お答え： 2 次の項が残っていてかつ $\operatorname{Hess} f$ が正則行列出ない場合はちょっと複雑です．2 次の項が影響する方向と 3 次以上の項が影響する方向にわかれますので．一般論として定理にするのは困難です．

質問： 定理 12.5 の証明に書いてある「$h^2 + k^2$ が十分小さいときは $|R_3(h,k)|$ は $|\varphi(h,k)|$ に比べて十分小さい」がいまいちよくわからないのですが，どういうことですか?

お答え： いまいち，というのはどの程度のことでしょうか（前期から何度も言っていますが）．一変数関数の極値判定条件の説明の「いい加減バージョン」と「ちょっと正確バージョン」を比較してみてください（1 月 21 日の講義です）．それのアナロジー（類似）で理解できませんか?

質問： $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2} = 0$ というのは $R_3(h,k) = o(h^2+k^2)$ と表せますか?　**お答え：**はい．

質問： p. 90, 定理 12.1 の証明の $F'(0)$ と $F''(0)$ と $F'''(\theta)$ が並んで書かれている所 $F'''(\theta)$ は $F'''(0)$ のミスではなく「θ」ですか? あと，この $F^{(n)}(0)$ の式は $(x+y)^n$ を展開した式の形と似てると思ったのですが，$(x+y)^n$ の展開式と同じような形になると思っても大丈夫ですか?

お答え： 前半：もし 0 だとしたら $(0 < \theta < 1)$ はどういう意味を持つでしょう？ したがって，文脈から 0 ではなく θ であるべきだろう，ということが簡単に推測できます．ところで，この式は 1 変数関数のテイラーの定理ですが，そのステートメントはなんだったでしょう．後半：「$(x+y)^n$ の展開式」は「二項定理」といいます．こういった方が大人な感じがします．で，2 変数関数のテイラーの定理の n 次の項は

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}}(a,b) h^m k^{n-m}.$$

質問： 事実 12.7 において，2 次形式が $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ の右辺は $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ という意味ですか？ また，$x_i x_j = x_j x_i$ だから $a_{ij} = a_{ji}$ が等しくなるように（原文ママ；a_{ij} と a_{ji} が等しくなるように，ですね）按分することができるとは，具体的にどのようなことを言っているんですか？

お答え： 前半：はい．後半：一般に $\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ に対して $\tilde{a}_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ とすると，$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ で，かつ $\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_i x_j$ となる．したがって最初から $a_{ij} = a_{ji}$ となる場合のみを考えればよい．

質問： Hesse 行列を見ているとヤコビ行列を思いだしました．この 2 つにはなにか関係があるのでしょうか．

お答え： 関数 f に対して $\operatorname{grad} f\colon (x,y) \mapsto (f_x, f_y)$ という $\mathbb{R}^2$ の領域から $\mathbb{R}^2$ への写像 $\operatorname{grad} f$ のヤコビ行列がヘッセ行列．

質問： ヘッセ行列（p 91 (12.3)) について，これをヘッセ行列というのは 2 次のときだけですか？ 3 次以降のときもこう呼ぶのですか？　**お答え：**後者です．

質問： そもそもなぜ ε-δ 論法で ε と δ を用いたのでしょうか．また，答案を書くときに，ε と δ を他の文字に置き換えても良いのでしょうか？

お答え： 前半：Wikipedia をみるとそれらしきことが書いてありますが，定かではありません．error と distance．後半：もちろんきちんと説明してあれば問題ありません．試験などでは「任意の正の数 A に対して正の数 B が存在して」などでもよいですが，世間で使うと「常識を知らない人」と思われます．

質問： $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ は $(x,y) = (0,0)$ で極値となるか，Hesse 行列で判定できない場合，他のやり方で極値かどうか調べる方法はありますか．

お答え： 各個撃破．講義で少しコメントします．

質問： 2 変数関数をテイラー展開により展開すると，変数分離ができるということですか？

お答え： 「変数分離」とはどういうことを指しているのでしょうか．

質問： プリント定理 12.1 の証明がよくわからなかったので教えて下さい．

お答え： どのあたりが？（という受け答えは前期以来何度もした記憶が...）

質問： 12.4 の内容が理解できませんでした．

お答え： そうですか．

質問： 3 変数関数の極値の判定も 2 変数と同じようにやるのですか．

質問： 4 変数以上の極値判定でも固有値の符号を使うのですか？

お答え： 講義ノート 95 ページ．

質問： 講義資料 p. 97 の 1) C^r-級なら結論として得られる関数も C_r-級になる（原文ママ：C^r-級のことか）．はなぜ成立するのですか．p. 97 の定理 13.1 で“ただひとつ”と限定できるのはなぜですか．

お答え： 前半：証明はかなり面倒くさい．ここでは扱わない．後半：ということが証明できるから．前半の事実よりは難しくないが，やはりこの講義では扱わない．

質問： 常微分方程式は何が常なんですか？ 偏微分方程式もあるんですか？

お答え： 前期の講義ノート 8．

質問： 二次形式の勉強したいです．大学で推奨された教科書はわかりにくいです．何かこう，わりとかみ砕いた表現をつかっている線形の教科書はごぞんじないですか？

お答え： いくつか出ていると思いますが，それがあなたにとってわかりやすいかどうかは山田には判定できません．書店や図書館で，最低 10 冊は眺めてご覧なさい．

質問： 数学はキライだけど，先生のことは大好きです ♡♡♡

お答え： へえ．どう答えればいいんだろう．「君はキライだけど数学は大好きです」？