2015 年 2 月 4 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は遅くても 2 月 10 日以降, **数学事務室 (本館 3 階 332B)** にて返却いたします.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 2015 年 2 月 14 日までに山田まで電子メイルでお申し出ください. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. また, 成績に関する議論の土台は, **書かれた答案・提出物の内容のみ**とさせていただきます.
- 12 月 24 日の講義で説明したように, **トラップ問題**（配点が -100 点から 5 点）があります.

指定用紙のみ持込可

定理 A: 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である.

定理 B: 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するならば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する.

定理 C: a を含む開区間で定義された C^∞-級関数 f が $f'(a)=0$, $f''(a)>0$ を満たせば f は a で極小値をとる.

定理 D: 点 (a,b) を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上の C^∞-級関数 $f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ である.

定理 E: 点 (a,b) を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 $f(x,y)$ が $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たしているとき,

- $\det \operatorname{Hess} f(a,b) > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) > 0$ (<0) なら f は (a,b) で極小値 (極大値) をとる.
- $\det \operatorname{Hess} f(a,b) < 0$ なら f は (a,b) で極値をとらない.

ただし $\operatorname{Hess} f$ は f のヘッセ行列である.

定理 F: 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^∞-級ならば, 次を満たす θ が存在する.

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1.$$

定理 G: すべての項が 0 でない数列 $\{a_n\}$ に対して, 極限値 $r=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在するとき,

(1) $r<1$ なら級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する. (2) $r>1$ なら級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

定理 H: すべての項が正である単調減少数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束するならば, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する.

定理 I: 冪級数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 r が正ならば, それが定める関数 f は開区間 $(-r,r)$ で連続である.

定理 J: 定理 I の状況で, $|x|<r$ ならば $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ が成り立つ. とくに右辺の収束半径は r である.

定理 K: 定理 I の状況で f は $(-r,r)$ で微分可能で $\dfrac{d}{dx}f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ が成り立つ. 右辺の収束半径は r である.

定理 L: 定理 I の状況で, $r\neq+\infty$ のとき, 定理 I の冪級数の右辺 に $x=r$ を代入した級数が収束するならば

$\displaystyle\lim_{x\to r-0} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ が成り立つ.

問題 A 問題用紙冒頭の定理のうち, 定理 A, 定理 B, 定理 C の $\boxed{\text{逆}}$ はそれぞれ成立するか. 理由をつけて答えなさい. [15 点]

（定理 A については **トラップ問題**. 配点は -100 点から 5 点）

裏面に続く

問題 B 文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{11}$ に最もよく充てはまる数・式・×を入れなさい． [20 点]

2 変数関数 $f(x,y) = (x^2+y^2+1)^2 - 4x^2$ の偏導関数は $\boxed{1}$ であるから，これらがすべて 0 になるのは，x 座標が小さい順に $(x,y) = \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}$ である[1]．これらの点で，f のヘッセ行列（行列式ではない）は

$$\mathrm{Hess}\, f(\boxed{2}) = \boxed{6},\ \mathrm{Hess}\, f(\boxed{3}) = \boxed{7},\ \mathrm{Hess}\, f(\boxed{4}) = \boxed{8},\ \mathrm{Hess}\, f(\boxed{5}) = \boxed{9}$$

となる[2]．したがって，f が極大値をとる点をすべて挙げると $(x,y) = \boxed{10}$，f が極小値をとる点をすべて挙げると $(x,y) = \boxed{11}$ である[3]．

問題 C 文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{15}$ に最もよく充てはまる数・式・×を入れ，下線 **a** の理由を書きなさい． [25 点]

$f(x) = \cos x$ に対して，$a = 0$, $h = x$, $n = 3$ として問題用紙冒頭の定理 **F** を適用すると，

$$\cos x = \boxed{1} + \boxed{2}x + \boxed{3}x^2 + \boxed{4}x^3 + R_4(x), \qquad R_4(x) = \boxed{5} \quad (0 < \theta < 1)$$

と書ける．とくに $x = 0.6$ とすると $\cos 0.6 = \boxed{6} + R_4(0.6)$, $_{\mathbf{a}}\underline{\boxed{7} < R_4(0.6) < \boxed{8}}$ が成り立つ[4]．したがって，$\cos 0.6 = \boxed{9}.\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\ldots$[5] である．

問題 D 以下の文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{9}$ にもっともよく充てはまる数・式・アルファベットをいれなさい．ただし「定理$\boxed{}$」には問題用紙冒頭の定理に対応するアルファベット **A**—**L** が入る．さらに下線 **a** の部分の理由を書きなさい． [30 点]

次の冪級数 $(*)$ の収束半径は，$_{\mathbf{a}}\underline{定理\boxed{1}\ より\boxed{2}}$ である：

$$(*) \qquad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

区間 $|x| < \boxed{2}$ で $(*)$ が定める関数を f とすれば，定理$\boxed{3}$ より $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{4} = \boxed{5}$ となる．とくに $f(0) = 0$ であるから $f(x) = \boxed{6}$ を得る．ここで，$x = 1$ のときは定理$\boxed{7}$ より $(*)$ は収束するので，定理$\boxed{8}$ から $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \boxed{9}$ である．

問題 E 次の中から 1 問を選び，解答しなさい． [10 点]

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} + a\tan x + be^x + c}{x - \sin x}$ が存在するような定数 a, b, c と極限値を求めなさい．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき，次の値を，理由をつけて答えなさい：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(3) 次をみたす関数 $x(t)$ を求めなさい：

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = \cos t, \qquad x(0) = 0, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 1.$$

問題 F [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．

おつかれさまでした ♡

---

[1]条件をみたす (x,y) の組は 4 組以下である．答えが 4 組未満の場合は，余った解答欄に×印を入れよ．

[2]$\boxed{6}$–$\boxed{9}$: 対応する点がないときは解答欄に × を入れよ．

[3]$\boxed{10}$–$\boxed{11}$: 該当する点がない場合は，解答欄に×を入れよ．

[4]$\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ には小数が入る．10 の指数を用いた表示でもよい．

[5]$\boxed{9}$–$\boxed{15}$ には，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 または × を入れる．上の推論から，その桁の数字が確定する場合は，その数字を，そうでない場合は × を入れよ．

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：A は −100 ∼ 5 点，B, C は各 5 点

定理 A の逆：

[ ] 成立する
[○] 成立しない

← いずれかに丸印を入れる．

$a_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

定理 B の逆：

[ ] 成立する
[○] 成立しない

← いずれかに丸印を入れる．

$a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ とすると，定理 H より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散する．

定理 C の逆：

[ ] 成立する
[○] 成立しない

← いずれかに丸印を入れる．

$f(x) = x^4$ とすると f は 0 で極小値（最小値）をとるが，$f''(x) = 12x^2$ は $x = 0$ で 0 となり，正にならない．

- 丸印と理由で合わせて 5 点．
- 「成立しない」で理由が正しくないものは 0 点
- 定理 A:「成立する」に丸印は −100 点（0 名）
- 定理 A: 無回答は −20 点（3 名）

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：各行 5 点

1 $f_x = 4x(x^2+y^2-1),\qquad f_y = 4y(x^2+y^2+1)$			
2 $(-1,0)$	3 $(0,0)$	4 $(1,0)$	5 ×
6 $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	7 $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	8 $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	9 ×
10 ×		11 $(-1,0),\quad (1,0)$	

問題 C の解答欄 配点：1–4:5 点；5:5 点；6:5 点；7–8 と a: 5 点；9–15: 5 点

1	2	3	4	5	6
1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{24}x^4\cos\theta x$	0.82

7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.0037	0.0054	0	8	2	×	×	×	×

下線 a の理由：

$\cos x$ は $[0,\pi]$ で単調減少だから，$0.6 \leqq \frac{\pi}{4}$ に注意すれば

$$R_4(0.6) = \frac{6^4\times 10^{-4}}{24}\cos(0.6\theta) \leqq \frac{6^4\times 10^{-4}}{24} = 54\times 10^{-4}$$

$$R_4(0.6) \geqq 54\times 10^{-4}\times\cos(0.6) \geqq 54\times 10^{-4}\times\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{2}}\cdot 10^{-4} = 27\sqrt{2}10^{-4} \geqq 38\times 10^{4}.$$

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 D の解答欄 配点：1–2:5 点；3–4: 5 点；5–6: 5 点；7: 5 点；8–9: 5 点；a: 5 点

1	2	3	4	5	6	7	8	9
G	1	K	$(-1)^n x^{2n}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$	H	L	$\dfrac{\pi}{4}$

下線 a の理由：

$a_n := \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ とおくと，$x \neq 0$ ならば $a_n \neq 0$．このとき，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n+1}{2n+3}|x|^2 \to |x|^2 \qquad (n \to \infty)$$

なので，定理 G より級数 $(*)$ は (1) $|x| < 1$ のとき絶対収束，(2) $|x| > 1$ のとき発散．したがって $(*)$ の収束半径は 1 である．

定理 G をどのように用いたか明記していないものは 0 点

問題 E の解答欄 配点：10 点

← 選択した問題番号を記入する．

(1) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \binom{\frac13}{1}x + \binom{\frac13}{2}x^2 + \binom{\frac13}{3}x^3 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^4)$,
$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
したがって，問題の式は

$$\frac{(1+b+c) + \left(\frac{1}{3} + a + b\right)x + \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{9}\right)x^2 + \frac{1}{162}(54a + 27b + 10)x^3 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}$$

となるので，極限値が定まるための必要十分条件は $a = -\frac{5}{9}$, $b = \frac{2}{9}$, $c = -\frac{11}{9}$, 極限値は $-\frac{14}{27}$.

(2) 極限値は α.
正の数 ε を任意にとる．
(a): $a_n \to \alpha$ だから，$n \geqq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる番号 N_1 をとることができる．(b): $a_n - \alpha \to 0$ だから，$a_n - \alpha$ は有界．したがって $|a_n - \alpha| < M$ $(n = 1, 2, \dots)$ となる M が存在する．
これらに対して，$N := \max\{N_1, [M \cdot N_1/(2\varepsilon)] + 1\}$ とおくと，$n \geqq N$ となる番号 n に対して

$$\left|\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right| \leqq \dots \text{中略} \dots < \varepsilon$$

である．

(3) $x(t) = \left(1 + \frac{t}{2}\right)\sin t$. ($x = \alpha \cos t$, $\dot\alpha = \beta/\cos^2 t$ とおいて定数変化法)

学籍番号			-						氏名	

2015 年 2 月 4 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 F への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 F 何か言い残すことがありましたらお書きください．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2014 年度入学の方は，学籍番号のうち "14_" を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．6 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

途中退室：

- 試験開始後 45 分を経過したら途中退室を認めます．
- 退室する方は，挙手をして監督者に申し出て，答案を手渡してください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	