1. 平均値の定理

前期は主に多変数関数を扱ったが，後期は高等学校で学んだ一変数関数を再び扱う．今回は主に高等学校で学んだこと（ではあるがあまり定着していなさそうなこと）の復習である．

1.1 復習：連続性と微分可能性

数直線上の区間 I で [1] 定義された（一変数）関数 f が [2] 点 $a\in I$ で**連続** [3] であるとは，

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \tag{1.1}$$

が成り立つことである．とくに，a が閉区間の左端（右端）のときは，(1.1) の左辺の極限は，**右極限**（**左極限**）とする [4][5]：

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \qquad \Bigl(\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)\Bigr).$$

とくに，区間 I の各点で連続な関数 f を**区間 I で連続な関数**，**I 上の連続関数**，**I 上で定義された連続関数**などという．

区間 I で定義された関数 f が I 上の点 a で**微分可能** [6] であるとは，極限値

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在することである．この値を f の a における**微分係数**といって $f'(a)$ で表す．区間 I の各点で微分可能な関数は **区間 I で微分可能である**といわれる．次の定理が成り立つ [7]．

[*] 2014 年 10 月 8 日
[1] 区間 an interval; 開 (閉) 区間 an open (a closed) interval.
[2] 関数 a function.
[3] 連続 continuous; 連続関数 a continuous function.
[4] 極限 limit; 右極限 right-hand limit; 左極限 left-hand limit.
[5] 極限の定義は第 6 回で扱う．ここでは「どんどん近づく」という理解でよい．
[6] 微分可能 differentiable; 微分係数 the differential coefficient; 導関数 the derivative.
[7] 定理 a theorem; 系 a corollary; 命題 a proposition; 補題 a lemma; 証明 a proof.

定理 1.1. 関数 f が a で微分可能なら，f は a で連続である．

証明． 二つの関数 F, G が

$$\lim_{x\to a} F(x)=\alpha, \qquad \lim_{x\to a} G(x)=\beta$$

をみたしているならば，

$$\lim_{x\to a}\bigl(F(x)\pm G(x)\bigr)=\alpha\pm\beta, \qquad \lim_{x\to a}\bigl(F(x)G(x)\bigr)=\alpha\beta$$

が成り立つこと（極限の公式）を用いる [8]．実際，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)\bigr)&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right)\\&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)&=\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)+f(a)\bigr)\\&=\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)\bigr)+\lim_{x\to a} f(a)=0+f(a)=f(a)\end{aligned}$$

が成り立つ． □

注意 1.2. 定理 1.1 の逆は成り立たない．実際，

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & (x\geqq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases} \qquad g(x)=\sqrt[3]{x}$$

はともに実数全体で定義された連続関数であるが，0 で微分可能でない．関数 f のグラフは 0 で角をもつが，g のグラフはなめらかな曲線であることに注意しよう．

区間 I で微分可能な関数 f が与えられたとき，I の各点 x に対して x における f の微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数 $f'\colon I\ni x\mapsto f'(x)\in\mathbb{R}$ を考えることができる．これを f の**導関数**という．

[8] これは証明が必要な事実であるが，そのためには極限の定義を明確にする必要がある．第 5 回で扱う．

例 1.3. 区間 I で微分可能な関数 f の導関数は，連続とは限らない．実際，次の関数を考えよう：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

すると f は微分可能で，その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる．とくに $x_n = 1/(2n\pi)$ $(n = 0, 1, \dots)$ とすると，$x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であるが，$f'(x_n) = -\frac{1}{2}$ なので

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = -\frac{1}{2} \neq f'(0).$$

したがって f' は 0 で連続でない． ♢

とくに，区間 I で微分可能，かつ導関数が I で連続となる関数を **C^1-級**[9] という．C^1-級であることは，微分可能であることより強い性質である．

1.2 平均値の定理

微積分学でもっとも重要な定理の一つが**平均値の定理** the mean value theorem である．

定理 1.4 (平均値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された（一変数）連続関数 f が，開区間 (a, b) では微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

平均値の定理の証明は第 2 回に与える．

微分可能な関数は連続であることに注意すれば，定理 1.4 から次の系がただちに従う：

[9] C^1-級 of class C^1 (c-one).

系 1.5. 一変数関数 f が a と $a + h$ を含む区間で微分可能であるとする．このとき，

$$f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h)h \qquad 0 < \theta < 1$$

をみたす θ が少なくとも一つ存在する．

証明． まず $h = 0$ の場合はどんな θ をとっても結論の式が成り立つ．

次に $h > 0$ の場合，f は $[a, a + h]$ で微分可能であるから，定理 1.1 よりとくに連続．したがって，定理 1.4 を $b = a + h$ として適用すると

$$f(a + h) = f(a) + f'(c)h \qquad a < c < a + h$$

をみたす c が少なくとも存在する．ここで $\theta = (c - a)/h$ とおけば $a < c < a + h$ から $0 < \theta < 1$ が得られる．

最後に $h < 0$ の場合は，区間 $[a + h, a]$ に対して平均値の定理 1.4 を適用すれば

$$\frac{f(a) - f(a + h)}{a - (a + h)} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(c) \qquad a + h < c < a$$

をみたす c が存在する．ここで $h < 0$ に注意すれば $c = a + \theta h$ $(0 < \theta < 1)$ と表されることがわかる． □

1.3 平均値の定理の応用

■ 関数の近似値

例 1.6. 平方根[10] $\sqrt{10}$ の近似値[11] を求めよう．関数 $f(x) = \sqrt{x}$，$a = 9$，$b = 10$ に対して定理 1.4 を適用すると

$$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{10 - 9} = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad 9 < c < 10$$

をみたす c が存在する．この式を整理すると

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad 9 < c < 10.$$

[10] 平方根 the square root.
[11] 近似値 an approximation.

とくに $c > 9$ だから

$$\sqrt{10} < 3 + \frac{1}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{6} < 3.17.$$

一方，$c < 10$ だから，上の式を用いて

$$\sqrt{10} > 3 + \frac{1}{2\sqrt{10}} > 3 + \frac{1}{2\left(3+\frac{1}{6}\right)} = 3 + \frac{3}{19} > 3 + \frac{3}{20} = 3.15.$$

以上から

$$3.15 < \sqrt{10} < 3.17$$

が得られた．とくに $\sqrt{10}$ を **10 進小数** [12] で表したとき，小数第一位は 1, 小数第二位は 5 または 6 であることがわかる． $\diamondsuit$

■ 関数の値の変化

定理 1.7. 区間 I で定義された微分可能な関数が，I 上で $f'(x) = 0$ をみたしているならば，f は I で定数である．

証明． 区間 I 上の点 a をとり固定する．この a とはことなる任意の I の点 x に対して $f(x) = f(a)$ であることを示せばよい．いま $x > a$ のときは，区間 $[a, x]$ に平均値の定理 1.4 を適用すると，

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c), \qquad a < c < x$$

をみたす c が存在することがわかる．ここで a，x はともに区間 I の点だから c も I の点である．したがって仮定から $f'(c) = 0$ なので $f(x) = f(a)$ を得る．一方，$x < a$ のときは区間 $[x, a]$ に関して同様の議論をすればよい． $\square$

注意 1.8. 一般に，点 a を含む開区間で定数であるような関数 f に対して $f'(a) = 0$ が成り立つことが，微分係数を定義通りに計算すればわかる．

系 1.9. 区間 I で定義された微分可能な関数 F, G がともに連続関数 f の原始関数 [13] ならば $G(x) = F(x) + C$ (C は定数) と書ける．

[12] 10 進小数 a decimal fraction; 小数第一位 the first decimal place.
[13] 原始関数 a primitive; 定数 a constant.

証明． 二つの関数 F, G はともに f の原始関数だから $F'(x) = G'(x) = f(x)$．したがって，関数 $H(x) = G(x) - F(x)$ は区間 I 上で $H'(x) = 0$ をみたすから，定理 1.7 より区間 I 上で定数である． $\square$

注意 1.10. 関数 F, G の定義域 I が区間でなければ系 1.9 は成り立たない．実際，$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ 上で [14] 定義された二つの関数

$$F(x) = \log|x|, \qquad G(x) = \begin{cases} \log x & (x > 0) \\ \log(-x) + 7 & (x < 0) \end{cases}$$

はともに $f(x) = 1/x$ の原始関数であるが，差は定数でない．

■ 関数の増減

定理 1.11. 区間 (a, b) で定義された微分可能な関数 f の導関数 が (a, b) で正 (負) の値をとるならば，f は (a, b) で単調増加 (減少) である [15]．

証明． 区間 (a, b) から二つの数 x_1, x_2 を $x_1 < x_2$ をみたすようにとる．このとき，区間 $[x_1, x_2]$ に対して定理 1.4 を適用すれば

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad (a <) x_1 < c < x_2 (< b)$$

をみたす c が存在することがわかる．仮定より $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$) なので，$x_2 - x_1 > 0$ であることと合わせて

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \bigl(f(x_2) - f(x_1) < 0\bigr)$$

が得られる．すなわち $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) が成り立つことがわかるので，f は単調増加 (減少)． $\square$

注意 1.12. 微分可能な関数 f の導関数 f' が連続である [16] とき，f の定義域の内点 c で [17] $f'(c) > 0$ ならば，c を含む開区間 I で，f が I 上で単調増加となるものが存在する．実際，f' が連続かつ $f'(c) > 0$ ならば c を含む開

[14] 記号 $A \setminus B$ は，集合 A から集合 B の要素をすべて取り去ってできる集合を表す：$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$．これを $A - B$ と書くこともある．
[15] 単調増加 (減少) monotone increasing (decreasing); 正 positive; 負 negative.
[16] すなわち C^1-級．
[17] すなわち c を含むある開区間が f の定義域に含まれるような点．

区間 I で $f'(x) > 0$ が I 上で成り立つものが存在する (この事実は第 6 回講義にて説明する).

例 1.13. 一般に，微分可能な関数 f の定義域の一点 c で $f'(c) > 0$ だからといって，c を含むある開区間で f が単調増加であるとは限らない．実際，例 1.3 の関数 f は $f'(0) = 1/2 > 0$ をみたしている．ここで，$x = 0$ を含む開区間 I を一つ与え，$\xi = 1/(2m\pi)$ が I に含まれるように十分大きい番号 m をとると，$f'(\xi) = -\frac{1}{2} < 0$ である．f' は $x \neq 0$ では連続だから ξ を含む区間 J で $f'(x) < 0$ $(x \in J)$ となるものが存在する．したがって，共通部分 $I \cap J$ で f は単調減少である．一方，$\eta = 1/\bigl((2m+1)\pi\bigr)$ が I に含まれるように十分大きい番号 m をとると，$f'(\eta) = \frac{3}{2} > 0$ なので区間 J' で $f'(x) > 0$ $(x \in J)$ となるものが存在する．このとき，共通部分 $I \cap J'$ で f は単調増加である．すなわち，0 を含む任意の開区間は f が単調減少であるような区間と単調増加である区間を含む. $\diamondsuit$

■ **積分の平均値の定理**　平均値の定理 1.4 を用いると，次を示すことができる：

定理 1.14. 区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c) \qquad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する.

証明は演習問題にしておこう.

問　　題　　1

1-1　平均値の定理 1.4 の状況を絵に描きなさい.

1-2　平均値の定理を用いて $\sqrt{5}$ の近似値が 2.2 (小数第一位の数字は 2) であることを示しなさい.

1-3　平均値の定理を用いて，$\sin 0.1$, $\tan 0.1$ の近似値を求めなさい（0.1 radian は何度くらいか?）．ただし，答えは確定した桁の数字だけを書くこと（上の問い参照）.

1-4　工太郎君は，午前 10 時に東名高速道路の東京 IC (東京都世田谷区) を自動車で通過し，346.8Km 先の小牧 IC (愛知県小牧市) に同じ日の午後 1 時についた. 彼がスピード違反をした瞬間が存在することを証明しなさい. (注：日本の高速道路の制限スピードは，区間・天候などによるが，時速 100Km を超えることはない.)

1-5　定理 1.1 の証明の中の等式変形の一つひとつの等号が成り立つ理由を考えなさい.

1-6　関数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

は C^1-級であることを示しなさい.

1-7　定理 1.14 を証明しなさい.（ヒント：微積分の基本定理を用いる.）さらに，この定理の絵を描きなさい.