2. 平均値の定理とテイラーの定理

2.1　平均値の定理の証明

平均値の定理 1.4 を示すには，次の連続関数の性質 (第 8 回講義で扱う予定; ここでは証明を与えない) を用いる：

定理 2.1 (最大・最小値の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f は，区間 $[a,b]$ で最大値・最小値をもつ.

ここで，区間 I で定義された関数 f が $c\in I$ で**最大値** (**最小値**) をとる [1]，とは任意の $x\in I$ に対して $f(x)\leqq f(c)$ ($f(x)\geqq f(c)$) が成り立つことである．関数 f が区間 I で**最大値** (**最小値**) をとるとは，上のような $c\in I$ が存在することである.

注意 2.2. 上の定義における c は定義域 I に含まれていることに注意しよう．たとえば $\mathbb{R}$ 全体で定義された関数 $f(x)=\tan^{-1}x$ は，すべての実数 x に対して $f(x)\leqq\pi/2$ をみたしているが $f(c)=\pi/2$ となる実数 c は存在しないので，最大値をとるとはいえない.

注意 2.3. 定理 2.1 は (第 8 回にのべる中間値の定理と同様) よく考えないとあたり前の定理であるが，実数の連続性 [2] （第 7 回）と深く関わっている．実際，定義域を有理数に限って，$f(x)=4x^2-x^4$ $(0\leqq x\leqq 2)$ を考えると，これは $0\leqq x\leqq 2$ 上で (定義域を有理数に限っても) 連続な関数だが，最大値をとらない．もちろん，同じ関数を，$\mathbb{R}$ の区間 $[0,2]$ 上で定義された連続関数と考えれば $x=\sqrt{2}$ で最大値をとる.

区間 I の点 c が I の**内点** [3] であるとは，c 含む開区間で I に含まれるものが存在することをいう．たとえば閉区間 $I=[a,b]$ に対して $c\in(a,b)$ は I の内点であるが，a, b は I の内点ではない.

---

[*] 2014 年 10 月 10 日 (2014 年 10 月 22 日訂正)
[1] 最大値 the maximum; 最小値 the minimum.
[2] 実数 a real number; 実数の連続性 continuity of real numbers; 有理数 a rational number.
[3] 内点 an interior point

補題 2.4. 区間 I で定義された関数 f が I の内点 c で最大値または最小値をとるとする．さらに f が c で微分可能ならば $f'(c)=0$ が成り立つ.

証明. 点 c は I の内点だから十分小さい正の数 δ をとれば，開区間 $(c-\delta,c+\delta)$ は I に含まれる．いま f は c で微分可能だから，極限値

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

が存在する．とくに f が c で最大値をとるならば，$|h|<\delta$ をみたす任意の h に対して $f(c+h)-f(c)\leqq 0$ なので

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\begin{cases}\leqq 0 & (0<h<\delta\text{のとき})\\ \geqq 0 & (-\delta<h<0\text{ のとき})\end{cases}$$

となるので，h を 0 に近づけた時の極限値 $f'(c)$ は 0 でなければならない．最小値の場合も同様である [4]. □

補題 2.5 (ロル [5] の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 F が開区間 (a,b) で微分可能，かつ $F(a)=F(b)$ をみたしているならば，

$$F'(c)=0,\qquad a<c<b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する.

証明. 関数 F は $[a,b]$ で連続だから，定理 2.1 から c_1, $c_2\in[a,b]$ で F は c_1 で最大値をとり，c_2 で最小値をとるようなものが存在する．もし c_1, c_2 がともに a, b いずれかの値をとるならば，仮定から $F(c_1)=F(c_2)$ となって，最大値と最小値が一致する．このとき F は定数関数となるので，区間 (a,b) で $F'=0$ となり結論が得られる．そうでない場合は c_1, c_2 の少なくとも一方が開区間 (a,b) に含まれるので，それを c とおけば補題 2.4 より $F'(c)=0$. □

平均値の定理 1.4 **の証明**.　関数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

に対してロルの定理 (補題 2.5) を適用すればよい（問題 2-2）. □

---

[4] “同様である” と書いて証明が省略されていたら，それが本当か自分で確かめてみよう.
[5] Michel Rolle (1652-1719; Fr); ロルの定理 Rolle’s theorem.

定理 2.6 (コーシー [6] の平均値の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f, g がともに (a,b) で微分可能，$g(a) \neq g(b)$ をみたし，区間 (a,b) 上で $g'(x) \neq 0$ であるとする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad a < c < b$$

をみたす c が少なくともひとつ存在する．

証明． 関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\bigl(g(x)-g(a)\bigr)$$

に対してロルの定理 (補題 2.5) を適用すればよい（問題 2-2）. □

2.2 高階の導関数

区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が微分可能であるとき，f は 2 階 (2 回) 微分可能である，といい，f' の導関数 f'' を f の **2 次導関数** [7] という．一般に正の整数 $k \geqq 2$ に対して，k 階微分可能性，k 次導関数が次のように帰納的に定義される：

> 区間 I で定義された関数 f が $(k-1)$ 階微分可能であり，$(k-1)$ 次導関数が微分可能であるとき，f は k 階微分可能であるといい，$(k-1)$ 次導関数の導関数を k 次導関数とよぶ．

関数 f の k 次導関数を

$$f^{(k)}(x), \qquad \frac{d^k}{dx^k}f(x), \qquad \frac{d^ky}{dx^k}$$

などと書く．最後の表記は $y = f(x)$ のように従属変数を y と表した時に用いられる．

[6] Augustin Louis Cauchy (1789–1857, Fr); これに対して，平均値の定理 1.4 を**ラグランジュの平均値の定理**ということがある; Joseph-Louis Lagrange (1736–1813, It).
[7] 2 次導関数 the second derivative; k 次導関数 the k-th derivative.

例 2.7. (1) 正の整数 n に対して $f(x) = x^n$ とすると，$f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$ ($k \leqq n$ のとき), $f^{(k)}(x) = 0$ ($k > n$ のとき) である．ここで $k = n$ のとき $f^{(n)}(x) = n!x^0$ は定数関数 $n!$ とみなしている．

(2) $f(x) = e^x$ ならば，任意の負でない整数 k に対して $f^{(k)}(x) = e^x$.

(3) $f(x) = \cos x$ ならば，任意の負でない整数 k に対して $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$ である．とくに，負でない整数 m に対して $f^{(m)}(x) = \cos(x + \frac{m\pi}{2})$ である． ♢

定義 2.8.
- 区間 I で定義された関数 f が I で連続であるとき f は C^0-級であるという．
- 区間 I で定義された微分可能な関数 f の導関数が連続であるとき f は **1 階連続微分可能**または C^1-級であるという．
- 区間 I で定義された k 階微分可能な関数 f の k 次導関数が連続であるとき f は k **階連続微分可能**または C^k-級であるという．
- 任意の正の整数 k に対して C^k-級であるような関数を C^∞-級という．

2.3 テイラーの定理

定理 2.9 (テイラー [8] の定理)**.** 関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 回微分可能ならば，$a+h \in I$ となる h に対して

$$\begin{aligned}
(2.1)\quad f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)\\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j + R_{n+1}(h),
\end{aligned}$$

$$R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

[8] Sir Brook Taylor (1685–1731, En)

をみたす θ が少なくともひとつ存在する [9].

証明. 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$F(t) := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a+th)}{k!}(1-t)^k h^k\right) + (1-t)^{n+1}\left(f(a+h) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k\right)$$

は微分可能で $F(0)=F(1)=f(a+h)$ をみたしている．これにロルの定理 (補題 2.5) を適用すればよい (問題 2-6). □

例 2.10. 再び $\sqrt{10}$ の近似値を求めよう．関数 $f(x)=\sqrt{x}$ に $a=9$, $h=1$, $n=1$ としてテイラーの定理 2.9 を適用すると,

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{9+\theta}^3}, \qquad 0<\theta<1$$

をみたす θ が存在することがわかる．とくに，$\theta \in (0,1)$ だから

$$\begin{aligned}
\sqrt{10} &\leqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{10}^3} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{10}} \\
&\leqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{16}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{320} \\
&\leqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{3}{1000} = 3 + \frac{1}{6} - 0.003 \leqq 3.16366\ldots \leqq 3.164 \\
\sqrt{10} &\geqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{9}^3} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\times 27} \\
&\geqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\times 25} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{200} = 3 + \frac{1}{6} - 0.005 \geqq 3.161
\end{aligned}$$

となるので

$$3.161 \leqq \sqrt{10} \leqq 3.164$$

が成り立つ．とくに $\sqrt{10} = 3.16\ldots$ (小数第二位まで正しい)．この場合，テイラーの定理 2.9 の次数 n を 3, 4,... とあげていくと，近似の精度がよくなる（問題 2-8）. ◇

[9] 式 (2.1) の総和記号の $j=0$ の項において h^0 は $h=0$ のときも 1 であると約束しておく.

テイラーの定理 2.9 は次のように書くこともできる：

系 2.11 (テイラーの定理)**.** 関数 f が a, b を含む開区間 I で $(n+1)$ 回微分可能ならば,

$$\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n + R_{n+1}, \\
R_{n+1} &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

を満たす a と b の間の数 c が存在する.

問　題　2

2-1　定理 2.1 の仮定が必要であることを，次のようにして示しなさい：

- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値をもつが最小値をもたないものの例を挙げなさい.
- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい.
- 閉区間 $[0,1]$ で定義された (連続とは限らない) 関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい.

2-2　平均値の定理の証明 (10 ページ) を完成させなさい．同様に，コーシーの平均値の定理 2.6 の証明を完成させなさい.

2-3　次のコーシーの平均値の定理 2.6 の証明の**誤り**を指摘しなさい：関数 f, g に平均値の定理 1.4 を適用すると

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \qquad \frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$$

をみたす $c\in(a,b)$ が存在することがわかる．この第一の等式を第二の等式で割ると，結論が得られる.

2-4　コーシーの平均値の定理を用いて，次を示しなさい (ロピタル [10] の定理の特別な場合)：

関数 $f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a,a+h)$ で連続，かつ $(a,a+h)$ で微分可能であるとする．さらに $f(a)=g(a)=0$, かつ極限値

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在するならば，極限値

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

も存在して，両者は等しい.

2-5　次の極限値を求めなさい.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\tan x-x}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{5^x-3^x}{x}$.

[10] Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661–1704, Fr); l'Hospital とも書かれる.

- $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{5^x-3^x}{x^2}$.

2-6　テイラーの定理 2.9 の証明を完成させなさい.

2-7　次の場合に，式 (2.1) を具体的に書きなさい.

- $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$, $n=2$.
- $f(x)=e^x$, $a=0$, $n=2$; n は一般の自然数.
- $f(x)=e^x$, a は一般の実数, n は一般の自然数.
- $f(x)=\cos x$, $a=0$, $n=2$; $n=2k-1$ (k は正の整数).
- $f(x)=\sin x$, $a=0$, $n=3$; $n=2k$ (k は正の整数).
- $f(x)=\tan x$, $a=0$, $n=3$.
- $f(x)=\tan^{-1}x$, $a=0$, $n=4$; n は一般の自然数.
- $f(x)=\log(1+x)$, $a=0$, $n=3$; n は一般の自然数.
- $f(x)=(1+x)^\alpha$, $a=0$, $n=3$; n は一般の自然数．ただし α は実数.

2-8　例 2.10 の n を 3 にして $\sqrt{10}$ の近似値を求めなさい．小数第何位まで求まるか.

2-9　$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよう.

- 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ に $a=1$, $h=0.1$, $n=2$ としてテイラーの定理 2.9 を書きなさい.
- このとき，$R_3(h)$ 以外の項の総和はいくつか.
- $R_3(h)$ の大きさを不等式で評価することによって，$\sqrt{1.1}$ の値を求めなさい.
- 同じことを $n=3$ として試みなさい.

2-10*　地球 (半径 $R=6.4\times10^6$ メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き，その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき，ゴムひもの伸びは

$$2\left(\sqrt{2R+1}-R\tan^{-1}\frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right)$$

で与えられる．この値の近似値を手計算で求めなさい.