# 7. 連続関数の性質

第 2 回に与えた平均値の定理の証明で，連続関数に関する最大・最小値の定理（定理 2.1）を用いた．今回はそれに証明を与えよう．そのために，実数の連続性公理 5.12 のいくつかの言い換えを説明する．

## 7.1 区間縮小法

**定理 7.1** (ワイエルストラス [1] の区間縮小法)**.** 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が条件

(1) 各番号 $n$ に対して $a_n < b_n$,

(2) $\{a_n\}$ は単調非減少，$\{b_n\}$ は単調非増加,

(3) $b_n - a_n$ は $n \to \infty$ で 0 に収束する．

をみたすなら，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限値 $c$ に収束する．とくに $c$ は，すべての番号 $n$ に対して $a_n \leqq c \leqq b_n$ をみたす唯一の実数である．

**注意 7.2.** 定理 7.1 が「区間縮小法」[2] とよばれるのは以下による：仮定 (1) から $I_n := [a_n, b_n]$ は空でない閉区間；仮定 (2) から各 $n$ に対して $I_n \supset I_{n+1}$，すなわち $\{I_n\}$ は入れ子になった区間の列；仮定 (3) から区間 $I_n$ の長さが 0 に近づく．これらの仮定のもと，結論は「すべての区間 $I_n$ に共通に含まれるただ一つの実数 $c$ が存在する」ということである．

**定理 7.1 の証明.** 仮定 (1)，(2) より，任意の番号 $n$ に対して

$$a_n < b_n \leqq b_{n-1} \leqq \dots \leqq b_1 \leqq b_0, \qquad b_n > a_n \geqq a_{n-1} \geqq \dots \geqq a_1 \geqq a_0$$

なので，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はそれぞれ上に有界な単調非減少数列，下に有界な単調非増加数列である．したがって連続性の公理 5.12 からこれらはそれぞれ極限値 $\alpha$, $\beta$ に収束する．ここで仮定 (3) と補題 5.7 から $\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ なので $\beta = \alpha$．ここですべての番号 $n$ に対して $a_n \leqq x$ が成り立つなら，補題 5.8 の (1) と補題 5.7 (1) から $\alpha \leqq x$．同様に，すべての $n$ に対して $b_n \geqq x$ が成り立つなら $x \leqq \alpha$．したがって，結論が成り立つ． □

[*] 2014 年 11 月 19 日 (2014 年 12 月 03 日訂正)

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897, De.

[2] 区間縮小法の定理：the nested interval theorem.



## 7.2 上限・下限

**定義 7.3.** 実数の集合 $X \subset \mathbb{R}$ が**上に有界**（**下に有界**）であるとは，「任意の $x \in X$ に対して $x \leqq M$ $(x \geqq M)$」をみたすような実数 $M$ が存在することである．この実数 $M$ のことを $X$ の**上界**（**下界**）という [3]．集合 $X$ が上に有界かつ下に有界なときに，$X$ は**有界**であるという．

**注意 7.4.** 数列 $\{a_n\}$ が上に有界である（定義 5.9）ことと，$\{a_n\}$ の全ての項を集めた集合が定義 7.3 の意味で上に有界であることは同値である．

**定義 7.5.** 集合 $X$ の要素 $M$ が $X$ の上界（下界）であるとき，$M$ を $X$ の**最大値**（**最小値**）という [4]．

また，集合 $X$ の上界 $M$ に対して，それより小さい $X$ の上界が存在しないとき，$M$ を $X$ の**上限**という [5]．同様に $X$ の下界 $M$ に対して，それより大きい $X$ の下界が存在しないとき $M$ を $X$ の**下限**という．

**例 7.6.** (1) 区間 $I = [0, 1]$ に対して 1 以上の任意の実数は $I$ の上界，1 は $I$ の上限，1 は $I$ の最大値である．

(2) 区間 $J = (0, 1)$ に対して 1 以上の任意の実数は $J$ の上界，1 は $J$ の上限であるが，$1 \notin J$ なので 1 は $J$ の最大値ではない．

(3) 集合 $X$ が最大値（最小値）をもてば，それが上限（下限）である．

(4) 集合 $X$ の上限（下限）が $X$ の要素ならば，それは $X$ の最大値（最小値）である． ◇

**注意 7.7.** 実数 $\alpha$ が集合 $X \subset \mathbb{R}$ の上限であるための必要十分条件は

(1) 任意の $x \in X$ に対して $x \leqq \alpha$ が成り立つ．

(2) 任意の正の数 $\varepsilon$ に対して $\alpha - \varepsilon < x$ をみたす $x \in X$ が存在する．

実際，(1) は $\alpha$ が $X$ の上界であることを表す．また，(2) は $\alpha$ より小さい数（$\alpha - \varepsilon$ と表している）は $X$ の上界ではないということを表している．下限の場合に対応する条件を書いてみよ（問題 7-1）．

[3] 上界：an upper bound; 下界：a lower bound.

[4] 最大値：the maximum; 最小値：the minimum.

[5] 上限：the lowest upper bound, the supremum; 下限：the highest lower bound, the infinimum.

**定理 7.8** (上限・下限の存在（実数の連続性）). 上に（下に）有界な実数の部分集合 $X$ は上限（下限）をもつ.

**注意 7.9.** 定理 7.8 は実数の連続性（公理 5.12）の異なる表現とみなせる（問題 7-7）．とくに定理 7.8 は有理数に対しては成立しない．実際，有理数の集合 $X \subset \mathbb{Q}$ を $X := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqq 2\}$ とすると [6]，$X$ は上に有界な $\mathbb{Q}$ の部分集合である．実際 2 は $X$ の上界であるが，有理数の範囲で上界の最小値は存在しない.

**定理 7.8 の証明.** 集合 $X$ が上に有界であるとして，その上界の一つを $M$ とする．いま $x_0 \in X$ をひとつとると $x_0 \leqq M$ である．そこで，2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$
\begin{aligned}
&a_0 := x_0 - 1, \qquad b_0 := M,\\
&(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left(\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right) & \left(\dfrac{a_j+b_j}{2} \text{ が } X \text{ の上界でないとき}\right) \\ \left(a_j, \dfrac{a_j+b_j}{2}\right) & \left(\dfrac{a_j+b_j}{2} \text{ が } X \text{ の上界であるとき}\right) \end{cases} \quad (j \geqq 0)
\end{aligned}
$$

と定める．すると，これらの数列は定理 7.1 の条件をみたす（問題 7-2）．実際 $I_j := [a_j, b_j]$ とすると，$I_{j+1}$ は $I_j$ を二等分した区間のうち一方となっている．したがって，区間縮小法（定理 7.1）により $\{a_n\}, \{b_n\}$ は同じ極限値 $c$ に収束する．以下，この $c$ が $X$ の上限であることを示す.

まず，注意 7.7 (1) が成り立つ．実際，$b_0$ はとり方から $X$ の上界．もし $b_j$ が $X$ の上界ならば，$b_{j+1}$ はそのとり方から $X$ の上界なので，数学的帰納法の原理から各 $b_n$ は $X$ の上界．したがって，各 $x \in X$ をひとつ固定すると $x \leqq b_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ が成り立つので，極限をとると $x \leqq c$（補題 5.8 (1)）．すなわち，任意の $x \in X$ に対して $x \leqq c$ が成り立つ.

一方，各番号 $n$ に対して $a_n < x$ をみたす $X$ の要素 $x$ が存在する．実際，$a_0 < x_0 \in X$ である．また，$a_j < x$ をみたす $X$ の要素 $x$ が存在すると仮定すると，

- $(a_j + b_j)/2$ が $X$ の上界ならば，$a_{j+1} = a_j$ だから $a_{j+1} < x$ をみたす $x \in X$ が存在する.
- $(a_j + b_j)/2$ が $X$ の上界でないならば，この値が $a_{j+1}$ だから $a_{j+1} < x$ となる $x \in X$ が存在する.

このことから，注意 7.7 (2) が成り立つことを示そう：任意の正の数 $\varepsilon$ をとると，$\{a_n\}$ が $c$ に収束することから「$n \geqq N$ ならば $|a_n - c| < \varepsilon$」となる番号 $N$ が存在する．この $N$ に対して $c - \varepsilon < a_N$ なので $c - \varepsilon < a_N < x$ をみたす $x \in X$ が存在する.

以上から $c$ が $X$ の上限である．下限の場合も同様にすればよい（問題 7-3）． □

[6] 有理数全体の集合 the set of rational numbers を $\mathbb{Q}$ で表す.



**記号 7.10.** 実数の集合 $X$ が上に有界（下に有界）のとき，その上限（下限）を $\sup X$ $(\inf X)$ と表す.

集合 $X \subset \mathbb{R}$ が上に有界でない（下に有界でない）ときは，$\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$ と書く.

この記号を用いると，$\mathbb{R}$ の部分集合 $X, Y$ に対して

$$
\begin{aligned}
\sup(X \cup Y) &= \max\{\sup X, \sup Y\},\\
\inf(X \cup Y) &= \min\{\inf X, \inf Y\}
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

が成り立つ [7]（問題 7-5）.

## 7.3 関数の値の上限・下限

区間 $I$ で定義された関数 $f$ に対して，その値をすべて集めてできる集合

$$
f(I) := \{f(x) \mid x \in I\}
\tag{7.2}
$$

を $f$ の**像**または「$f$ による区間 $I$ の像」という [8]．すなわち

- 数 $y$ が $f(I)$ の要素であるための必要十分条件は，$f(x) = y$ となる $x \in I$ が存在することである.
- 数 $y$ が $f(I)$ の要素でないための必要十分条件は，どんな $x \in I$ に対しても $y \neq f(x)$ となることである.

**例 7.11.** (1) 開区間 $I = (-1, 1)$ で定義された関数 $f(x) = x^2$ に対して，$f(I) = [0, 1)$ である.

(2) 区間 $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の関数 $f(x) = \tan x$ に対して $f(J) = \mathbb{R}$ である.

(3) 関数 $f(x) = \tanh x$ に対して $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ である. ◇

関数 $f$ が（$I$ で）**上に有界**（**下に有界**，**有界**）であるとは，その像 $f(I)$ が上に有界（下に有界，有界）となる（定義 7.3 参照）ことである．とくに像

[7] $X \cup Y$ は $X$ と $Y$ の合併集合 the union of $X$ and $Y$ を表す．$\max\{a, b\}$，$\min\{a, b\}$ はそれぞれ $a$, $b$ のうち小さくない方，大きくない方を表すが，$\max\{a, +\infty\} = +\infty$, $\min\{a, -\infty\} = -\infty$ と約束しておく.

[8] 像：the image.

$f(I)$ の上限・下限を

$$\sup_I f = \sup_{x\in I} f(x) := \sup f(I) = \sup\{f(x)\,|\,x\in I\}$$
$$\inf_I f = \inf_{x\in I} f(x) := \inf f(I) = \inf\{f(x)\,|\,x\in I\}$$

と書く（記号 7.10）．たとえば，像 $f(I)$ が上に有界でない，ということは

$$\text{(7.3)}\qquad \sup_I f = +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{l}\text{任意の実数 } M \text{ に対して } f(x) > M \text{ を}\\ \text{みたす } x\in I \text{ が存在する}\end{array}\right)$$

と表される．

**注意 7.12.** 区間 $I$ で定義された関数 $f$ に対して，$f(c) = \sup_I f$（$f(c) = \inf_I f$）をみたす $I$ の点 $c$ が存在するならば，$f$ は $c$ で最大値（最小値）をとる．

## 7.4 最大・最小値の定理

**定理 7.13** (最大・最小値の定理（定理 2.1））**.** 閉区間 $I = [a,b]$ で連続な関数 $f$ は，$I$ で最大値・最小値をとる．

**補題 7.14.** 閉区間 $I = [a,b]$ で連続な関数 $f$ の像 $f(I)$ は有界である．

**証明.** いま $f(I)$ が上に有界でないとして矛盾を導こう．このとき $I$ を二つに分けた区間 $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ のいずれか少なくとも一方では $f$ は上に有界でない．実際，(7.1) から両方の区間で上に有界ならば，$I$ でも有界となって矛盾が生じる．

このことに注意して，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を，$a_0 := a$, $b_0 := b$, 各番号 $j \geqq 0$ に対して

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left(\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right) & \left(\left[\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right] \text{ で } f \text{ が上に有界でないとき}\right) \\ \left(a_j, \dfrac{a_j+b_j}{2}\right) & \left(\left[\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right] \text{ で } f \text{ が上に有界であるとき}\right) \end{cases}$$

と定める．すると，各 $n$ に対して，区間 $[a_n, b_n]$ で $f$ は上に有界でないので， $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ かつ $f(c_n) \geqq n$ をみたすような数 $c_n$ をとることができる．これにより，新しい数列 $\{c_n\}$ が定義された．数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は区間縮小法（定理 7.1）の条件をみたしているので，共通の極限値 $c \in [a,b]$ に収束する．さらに $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ だから $\{c_n\}$ も同じ $c$ に収束する（補題 5.8）．

仮定より $f$ は $c$ で連続だから，定理 6.5 により $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$ が成り立つ．一方，$\{c_n\}$ のとり方から $f(c_n) \geqq n$ なので $\{f(c_n)\}$ は正の無限大に発散する．これは矛盾であるから $f$ は $I$ で上に有界である．下に有界であることも同様に示される．□



**定理 7.13 の証明.** 補題 7.14 から $f$ は $I$ で有界なので，$f(I)$ の上限を $\alpha$ とおく．このとき，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_0 := a$, $b_0 := b$, 各番号 $j \geqq 0$ に対して $J := \left[\frac{a_j+b_j}{2}, b_j\right]$ とおいて

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left(\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right) & \left(\sup_J f = \alpha \text{ のとき}\right) \\ \left(a_j, \dfrac{a_j+b_j}{2}\right) & \left(\sup_J f \neq \alpha \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

と定める．すると，(7.1) から各 $n$ に対して区間 $I_n := [a_n, b_n]$ の $f$ の上限は $\alpha$ である．とくに，各 $n$ に対して

$$(*)\qquad a_n \leqq c_n \leqq b_n, \qquad \alpha - \frac{1}{n} < f(c_n) \leqq \alpha$$

となる数 $c_n$ をとることができる（注意 7.7）．これで，新しい数列 $\{c_n\}$ が定義された．このとき，補題 7.14 と同様の議論で，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は同じ極限値 $c$ に収束する．

仮定より $f$ は $c$ で連続だから，定理 6.5 により $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$ 成り立つが，とくに $(*)$ から $f(c) = \alpha = \sup_I f$ である．したがって $f$ は $c \in [a,b]$ で最大値をとる（注意 7.12）．最小値の存在も同様に示される．□

## 7.5 中間値の定理

高等学校で学んだ中間値の定理[9] も，最大・最小値の定理と同様，実数の連続性の帰結である．この定理に証明を与えよう．

**定理 7.15.** 閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f$ が $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ をみたすならば，$f(c) = 0$, $a < c < b$ をみたす実数 $c$ が少なくともひとつ存在する．

**証明.** 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_0 := a$, $b_0 := b$, 各番号 $j \geqq 0$ に対して

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left(\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right) & \left(f\left(\dfrac{a_j+b_j}{2}\right) < 0 \text{ のとき}\right) \\ \left(a_j, \dfrac{a_j+b_j}{2}\right) & \left(f\left(\dfrac{a_j+b_j}{2}\right) \geqq 0 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

と定める．すると，各 $n$ に対して $f(a_n) < 0$, $f(b_n) \geqq 0$ が成り立つ．定理 7.13 の証明などと同様に $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は同じ極限値 $c \in [a,b]$ に収束するが，$f$ の連続性から

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqq 0, \qquad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqq 0$$

が成り立つので $f(c) = 0$．さらに，仮定より $f(a)$, $f(b)$ は 0 でないので $a < c < b$ が成り立つ．□

[9] 中間値の定理：the intermediate value theorem.

**例 7.16** (冪(べき)乗根)**.** 正の実数 $\alpha$ と正の整数 $n$ に対して

(7.4) $c^n = \alpha$ となる正の実数 $c$ がただ一つ存在する.

この $c$ を $\alpha$ **の（正の）**$n$ **乗根**[10] という.

事実 (7.4) を示そう.

**ただ一つであること：** 二つの正の数 $c_1, c_2$ が $c_1^n = c_2^n = a$ をみたすならば,

$$0 = c_1^n - c_2^n = (c_1 - c_2)(c_1^n + c_1^{n-1}c_2 + \cdots + c_1c_2^{n-1} + c_2^n)$$

となるが，右辺の 2 つめの因子は正だから 0 でない．したがって $c_1 = c_2$[11].

**存在すること：** (1) $\alpha = 1$ の場合は $c = 1$ とすればよい．(2) $0 < \alpha < 1$ のとき $I = [0, 1]$, $f(x) = x^n - \alpha$ とすると，$f$ は $I$ で連続（例 6.10）かつ $f(0) = -\alpha < 0$, $f(1) = 1 - \alpha > 0$ が成り立つので，中間値の定理 7.15 から $f(c) = 0$ $(0 < c < 1)$ をみたす $c$ が存在する．それが求めるものである．(3) $\alpha > 1$ ならば $J = [0, \alpha]$, $f(x) = x^n - \alpha$ に対して，$f(0) < 0$, $f(\alpha) = \alpha^n - \alpha = \alpha(\alpha^{n-1} - 1) > 0$ であるから中間値の定理から結論が得られる． ◇

**例 7.17** (逆関数)**.** 関数 $f$ は区間 $[a, b]$ で連続，かつ単調増加であるとする．このとき，

(7.5) 任意の $y \in f(I)$ に対して $f(x) = y$ をみたす $x \in [a, b]$ がただ一つ存在する.

実際，$F(x) = f(x) - y$ に対して中間値の定理を適用すればよい．とくに $y \in f(I)$ は任意にとれるから,

$$\mathbb{R} \supset f(I) \ni y \longmapsto \text{“}f(x) = y \text{ をみたす } x\text{”} \in \mathbb{R}$$

により新しい関数が定義される．この関数を $f$ の**逆関数**とよび $f^{-1}$ と書く[12]．連続関数 $f$ の逆関数 $f^{-1}$ は $f(I)$ で連続である（問題 7-6）． ◇

[10] $\alpha$ の $n$ 乗根: the $n$-th root of $\alpha$; 平方根: the square root; 立方根: the cubic root.
[11] これは高等学校の範囲.
[12] 逆関数：the inverse function; $f^{-1}$: the inverse of $f$.



# 問　題　7

**7-1** 注意 7.7 に倣って実数 $\alpha$ が $X \subset \mathbb{R}$ の下限であるための条件を書きなさい.

**7-2** 定理 7.8 の証明で与えた $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が定理 7.1 の仮定をみたしていることを確かめなさい.

**7-3** 定理 7.8 の上限の場合の証明をまねして下限の場合の証明を作りなさい.

**7-4** 区間 $(a, +\infty)$ で定義された関数 $f$ が

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ をみたすとは，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して次をみたす数 $M$ が存在することである：$x > M$ をみたす任意の $x$ に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ をみたすとは，任意の実数 $A$ に対して次をみたす数 $M$ が存在することである：$x > M$ をみたす任意の $x$ に対して $f(x) > A$.

(1) この定義に倣って，$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ の定義を述べなさい.

(2) 多項式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ に対して

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & (a_n > 0 \text{ のとき}) \\ -\infty & (a_n < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを示しなさい．$x \to -\infty$ の場合はどうか（ヒント：$a_n$ の符号と $n$ の偶奇で場合が分かれる）.

(3) 奇数次の多項式は少なくともひとつ実根（多項式 $f(x)$ に対して $f(c) = 0$ となる実数 $c$）をもつことを，中間値の定理 7.15 を用いて示しなさい.（中間値の定理の仮定をみたすような区間をどうやってとるか.）

(4) 関数 $e^x$ は多項式で表せないことを示しなさい.（ヒント：$x \to \pm\infty$ の極限を考えよ.）

**7-5***  式 (7.1) が成り立つことを確かめなさい.
（注意：$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$.）

**7-6***  例 7.17 で得られた逆関数 $f^{-1}$ は $f(I)$ で連続であることを確かめなさい.

**7-7***  連続性の公理 5.12 を未知とし，定理 7.8 が成り立つことを認めて，公理 5.12 の主張が成り立つことを示しなさい．すなわち，上限・下限の存在を認めて，上に有界な単調非減少数列が収束することを示しなさい.（ヒント：$\{a_n\}$ を上に有界な単調非減少数列として，そのすべての項を集めてできる集合を $A$ とすると $A$ は上に有界．したがって $\alpha := \sup A$ が存在するが，それが極限値である.）