8. 級数

8.1 級数の収束・発散

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{8.1}$$

の**形**を**級数**または**無限級数**という [1]．級数 (8.1) に対して

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{8.2}$$

によって新たな数列 $\{s_n\}$（部分和）を定義する [2]．

定義 8.1. 級数 (8.1) が**収束する**とは，式 (8.2) で与えられる数列 $\{s_n\}$ が収束することである．このとき，$\{s_n\}$ の極限値 c を級数 (8.1) の**和**とよび，

$$c = a_0 + a_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

と表す [3]．収束しない級数は**発散する**という．

定理 8.2. 級数 (8.1) が収束するならば，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する．

証明． 一般に収束する数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $q_n = p_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ で定まる数列 $\{q_n\}$ は同じ極限値に収束する（問題 8-2）．

級数の和を c とすると，式 (8.2) の $\{s_n\}$ と $\{t_n = s_{n+1}\}$ はどちらも c に収束する．したがって

$$0 = c - c = \lim_{n\to\infty} t_n - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (t_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n. \quad \square$$

[*] 2014 年 12 月 03 日 (2015 年 01 月 05 日訂正)

[1] 級数：a series; 無限級数：an infinite series; 式 (8.1) は一般に数を表すのではなく，a_j を記号 “+” でつないで並べた “絵” とみなす．

[2] 式 (8.2) の右辺は有限個の和なので，s_n はひとつの数である．

[3] すなわち，(8.1) は，収束するときに限り，一つの数を表すことになる．

定理 8.2 の対偶をとれば

系 8.3. 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない [4] ならば級数 (8.1) は発散する．

例 8.4. 定理 8.2 の逆は成立しない．実際，次の例がある [5]：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{であるが} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{は発散する．}$$

このことを確かめよう．部分和を $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく．正の整数 m に対して $n \geqq 2^m - 1$ をみたす番号 n を任意にとると，

$$\begin{aligned} s_n \geqq s_{2^m-1} &= \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{k} \right) \\ &\geqq \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{2^l} \right) = \sum_{l=1}^{m} \frac{2^{l-1}}{2^l} = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

番号 m は任意にとれるので，とくに $\{s_n\}$ は正の無限大に発散する（定義 5.3 の条件をみたすことは各自確かめよ）．この級数を**調和級数**という [6]．◇

例 8.5. 実数 r に対して初項 1，公比 r の**等比級数**は $|r| < 1$ のとき収束し，

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \qquad (|r| < 1 \text{ のとき})$$

となり，それ以外の場合は発散する．実際，例 5.21 より $|r| \geqq 1$ なら $\{r^n\}$ は 0 に収束しないので，系 8.3 より考えている級数は発散する．一方，$|r| < 1$ のときは例 5.21 から

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \to \frac{1}{1-r}$$

となるので，結論が得られる．◇

[4] このことは $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ とは異なる．例 6.15 を参照のこと．

[5] 式 (8.1) では添字が 0 から始まっているが，この例では添字が 1 から始まる．問題の性質によって添字の番号の付け方が異なるが，適切に読み替えて欲しい．

[6] 調和級数：the harmonic progression; 等比級数：a geometric progression（幾何級数）; 等差級数：an arithmetic progression（算術級数）．

8.2 正項級数

数列 $\{a_n\}$ の各項が $a_n \geqq 0$ をみたすとき，級数 (8.1) は**正項級数**とよばれる [7]．級数 (8.1) が正項級数であるとき，(8.2) で定義される部分和 $\{s_n\}$ は単調非減少数列だから，上に有界なら収束し（実数の連続性公理 5.12），上に有界でないなら正の無限大に発散する．このことから，次の収束判定法が得られる：

命題 8.6 (正項級数の比較)**.** 負でない実数からなる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が各 n に対して $a_n \leqq b_n$ をみたしているとする．このとき

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する．

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散するならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ も発散する．

証明． 部分和をそれぞれ

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$$

とおくとこれらは単調非減少数列で，仮定より $s_n \leqq t_n$（$n = 0, 1, 2, \dots$）が成り立つ．

(1): $\sum b_n$ が β に収束するならば，各番号 n に対して $t_n \leqq \beta$ なので，$s_n \leqq t_n \leqq \beta$ となる．この右辺は n に関係ない定数だから $\{s_n\}$ は上に有界．したがって s_n は収束する．

(2): $\sum a_n$ が発散するなら $\{s_n\}$ は正の無限大に発散するから，補題 5.8 より $\{t_n\}$ も正の無限大に発散する． □

注意 8.7. 級数の有限個の項を入れかえても収束・発散という性質は不変である [8]．したがって命題 8.6 の仮定は,「ある番号 N から先の番号 n に対して $a_n \leqq b_n$」とおきかえてもよい．さらに，有限個の項は負であっても構わない．

[7] 正項級数：a nonnegative-term series; 言葉の意味からは “非負項級数” というべきだが，習慣的に正項級数とよぶ．

[8] 和の値は変わる．

例 8.8. 実数 p に対して，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p = 1 + 2^p + 3^p + \dots \tag{8.3}$$

は

(1) $p \geqq -1$ ならば発散する．

(2) $p < -1$ ならば収束する [9]．

このことを示そう．番号 n を一つ固定するとき，$f(x) = n^x$ は x の単調増加関数であることに注意する．

(1): $p \geqq -1$ ならば，$n^p \geqq n^{-1} = 1/n$ なので，例 8.4 と命題 8.6 (2) から (8.3) は発散する．

(2) ($p \leqq -2$ の場合): まず $p \leqq -2$ の場合，$n \geqq 2$ に対して

$$n^p \leqq n^{-2} = \frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

ここで

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

は 1 に収束するので，命題 8.6 の (1) から (8.3) は収束する [10]

(2) ($-2 < p < -1$ の場合): $p = -1 - q$ ($q \in (0,1)$) とおくと，$n \geqq 2$ で

$$(n-1)^{p+1} - n^{p+1} = \frac{1}{(n-1)^q} - \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^q}\left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q - 1\right)$$

である．ここで，テイラーの定理 2.9 から，ある $\theta \in (0,1)$ に対して

[9] 収束することは示すことができるが，和を求めるのは別問題である．たとえば $p = -2$ の場合，$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ となるが，これはオイラーによって 1735 年に求められたといわれている．このような “値を求める” 問題は単なる練習問題でないことが多い．Leonhard Euler, 1707–1783, Sz.

[10] ここで，比較する数列 $1/(n(n-1))$ は $n \geqq 2$ でしか定義されていないが，級数の収束には最初の有限個の項の挙動は関わりないので $n \geqq 2$ の部分の収束を論じれば十分である（注意 8.7 参照）.

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^q = 1+\frac{q}{n-1}+\frac{q(q-1)}{2(n-1)^2}\left(1+\frac{\theta}{n-1}\right)^{q-2}$$
$$\geqq 1+\frac{q}{n-1}-\frac{q(1-q)}{2(n-1)^2} = 1+\frac{q}{n-1}\left(1-\frac{1-q}{2(n-1)}\right)$$
$$\geqq 1+\frac{q}{n-1}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right) \geqq 1+\frac{q}{2(n-1)} \geqq 1+\frac{q}{2n}$$

が成り立つ．ここで $0<q<1$, $n \geqq 2$ を用いた．したがって

$$n^p \leqq \frac{2}{q}\big((n-1)^{p+1}-n^{p+1}\big) \qquad (n \geqq 2)$$

であるが，$p<0$ に注意すれば

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{q}\big((k-1)^{p+1}-k^{p+1}\big) = \frac{2}{q}\left(1-n^{p+1}\right) \to \frac{2}{q} \qquad (n\to\infty)$$

となるので，命題 8.6 の (1) から (8.3) は収束する． ♢

8.3 交代級数

項がひとつおきに符号を変えるような級数を**交代級数**[11] という．

定理 8.9 (交代級数の和)．単調非増加で 0 に収束する数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $a_n=(-1)^n q_n$ $(n=0,1,2,\dots)$ とおくと級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q_n = q_0-q_1+q_2-q_3+\dots$$

は収束する．

証明． ある番号 n で $q_n=0$ ならば，そこから先の項はすべて 0 なので，すべての番号 n に対して $q_n>0$ となる場合のみを考えればよい．

部分和 $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$ を考え，正の整数 j に対して $a_j := s_{2j-1}$, $b_j := s_{2j}$ とおくと，$\{a_j\}$, $\{b_j\}$ は区間縮小法（定理 7.1）の仮定をみたす．実際，

[11] 交代級数：an alternating series.

$$b_j-a_j = s_{2j}-s_{2j-1} = (-1)^{2j}q_{2j} = q_{2j} > 0$$
$$a_{j+1}-a_j = s_{2j+1}-s_{2j-1} = (-1)^{2j+1}q_{2j+1}+(-1)^{2j}q_{2j} = q_{2j}-q_{2j+1} \geqq 0$$
$$b_{j+1}-b_j = s_{2j+2}-s_{2j} = q_{2j+2}-q_{2j+1} \leqq 0,$$

さらに $q_n\to 0$ から $b_n-a_n\to 0$．したがって定理 7.1 から，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限値 c に収束する．すなわち，任意の正の数 ε に対して番号 N_0 で

$$j \geqq N_0 \quad \text{ならば} \quad |a_j-c| = |s_{2j-1}-c| < \varepsilon, \quad |b_j-c| = |s_{2j}-c| < \varepsilon$$

となるものが存在する．そこで $N=2N_0-1$ とすれば「$n \geqq N$ ならば $|s_n-c|<\varepsilon$」となり $\{s_n\}$ が c に収束することがわかる． □

例 8.10. (1) 級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

は収束する．この級数は例 3.11 で現れたもので，そこでは和の値 $(\log 2)$ まで求めているが，収束することだけなら定理 8.9 だけから結論できる．

(2) 問題 3-5 の級数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

は収束する．和は $\pi/4$ である．

(3) 級数

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

は収束する．第 10 回で示すようにこの値は

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\dots = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi+3\log 2)$$

である．

♢

問　題　8

8-1　次は正しいか．正しければ証明を，正しくなければ反例をあげなさい．

(1)　級数 $\sum a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば級数 $\sum a_n$ は収束する．

8-2　数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ が c に収束するとする．このとき，$q_n = p_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ で定まる数列 $\{q_n\}$ も c に収束することを，定義 5.2 を直接つかって示しなさい．

8-3　例 8.8 の事実を次の不等式を用いて示しなさい：

$$\frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx \geqq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \qquad (n = 1, 2, \dots)$$
$$\frac{1}{n} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n}\,dx \leqq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\,dx \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

8-4　次の級数の和を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
ヒント：有理化

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
ヒント：$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ を考えよ．

8-5　実数 r に対して $a_n = nr^n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ とおく．

(1)　$|r| < 1$ のとき $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示しなさい．
ヒント：$|r| = 1/(1+h)$ $(h > 0)$ とおいて $(1+h)^n \geqq 1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2$ となることを用いる．

(2)　$|r| \geqq 1$ のとき $\{a_n\}$ は発散することを示しなさい．

(3)　部分和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ を求めなさい．
ヒント：等比級数の有限項の和を求めたのと同様の方法を用いなさい．

(4)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を求めなさい．

8-6　次の級数の収束，発散を調べなさい．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$