

## 10. 冪級数

与えられた数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  と文字  $x$  に対して

$$(10.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

の形の級数を  $x$  に関する冪級数<sup>べき</sup>という<sup>1)</sup>。級数 (10.1) がある範囲  $I$  の  $x$  の値に対して収束するならば、これは  $I$  上で定義された関数を表す：

$$(10.2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in I = \{x \in \mathbb{R} \mid (10.1) \text{ は収束} \}.$$

第 4 回のテイラー級数は、与えられた関数を冪級数で表すことができる例である。とくに  $|x|$  が小さいとき、(10.2) の  $f$  は右辺の最初の数項で近似される。

テイラー級数 (4.8) のように  $f(a+h)$  を  $h$  の冪級数で表すことができれば、 $f$  の  $a$  の近くの挙動を調べられる。とくに  $x = a+h$  とおけば、(4.8) は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

の形に書ける。この式の右辺のような形を  $a$  を中心とする冪級数ということがある。ここでは、 $0$  を中心とする冪級数 (10.1) を扱うことにする。

### 10.1 収束半径

命題 10.1. 冪級数 (10.1) が  $x = r$  に対して収束するならば、 $|x| < |r|$  をみたく任意の  $x$  に対して (10.1) は絶対収束する。

証明. 定理 8.2 から  $a_n r^n$  は  $0$  に収束するので、番号  $N$  で「 $n \geq N$  ならば  $|a_n r^n| < 1$ 」となるものが存在する。すると、 $n \geq N$  なる  $n$  に対して

$$|a_n x^n| = |a_n r^n| \left| \frac{x^n}{r^n} \right| \leq \rho^n \quad \left( \rho := \left| \frac{x}{r} \right| < 1 \right)$$

なので、例 9.17 から  $\sum a_n x^n$  は絶対収束する。 □

<sup>\*</sup>)2014 年 12 月 24 日/2015 年 1 月 7 日

<sup>1)</sup>冪級数：a power series, 「巾級数」は嘘字。

ここで、(10.1) に対して

$$(10.3) \quad r := \sup C, \quad C := \{|x| \text{ 級数 (10.1) は収束する} \}$$

とおくと、 $r \geq 0$  または  $r = +\infty$  となる。この  $r$  を冪級数 (10.1) の収束半径という<sup>2)</sup>。

命題 10.2. 冪級数 (10.1) の収束半径が  $r$  であるための必要十分条件は、次が成立することである：

- (i)  $|x| < r$  ならば (10.1) は絶対収束する。
- (ii)  $|x| > r$  ならば (10.1) は発散する。

とくに  $r = +\infty$  であることと、任意の実数  $x$  に対して (10.1) が絶対収束することは同値である。また  $r = 0$  であることと任意の  $x \neq 0$  に対して (10.1) が発散することは同値である。

証明. 必要性：式 (10.3) のように  $r, C$  をとるとき、

(i) :  $|x| < r$  のとき、 $\frac{1}{2}(r - |x|) = \varepsilon > 0$  とおくと、上限の性質 (注意 7.7 の (2)) から  $r - \varepsilon < s$  をみたく  $s \in C$  が存在する。とくに  $s$  で (10.1) は収束するが、 $|x| = r - 2\varepsilon < s$  なので命題 10.1 から (10.1) は絶対収束する。

(ii) :  $|x| > r$  をみたく  $x$  で (10.1) が収束するならば、命題 10.1 から  $(|x| + r)/2 (> r)$  でも収束するが、これは  $r$  の定義に反する。

十分性：実数  $r$  が (i), (ii) をみたくするとき、(ii) から  $r$  は  $C$  の上界となる。さらに (i) から  $r$  より小さい数は  $C$  の上界でない。したがって  $r = \sup C$ 。 □

冪級数の収束半径は次のように求められる：

定理 10.3 (コーシー・アダマールの定理<sup>3)</sup>). 冪級数 (10.1) の収束半径  $r$  は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$$

で与えられる。

証明. 各  $n$  に対して  $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$  なので

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r}$$

なので、定理 9.19 から ( $\alpha = |x|/r$  として) 結論が得られる。 □

<sup>2)</sup>収束半径：the radius of convergence.

<sup>3)</sup>Cauchy, Augustin Louis, 1789–1857; Hadamard, Jacques Salomon, 1865–1963.

定理 10.4 (ダランベールの定理<sup>4)</sup>). 冪級数 (10.1) に対して, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r$$

が存在するならば  $r$  が収束半径である.

証明. 問題 9-3 を用いれば定理 10.3 と同様.  $\square$

注意 10.5. コーシー・アダマールの定理 10.3 は任意の冪級数の収束半径を与える公式だが, ダランベールの定理では収束半径が求まらないことがある. 実際,  $a_n = 0$  となる  $n$  が無限個ある級数に対して定理 10.4 は適用できない.

例 10.6. (1) 冪級数  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  の収束半径は  $+\infty$  である. 実際, ダランベールの定理 10.4 を用いれば, 収束半径は  $(1/n!)/(1/(n+1)!) = n+1 \rightarrow \infty$  となることがわかる.

(2) 冪級数  $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$  の収束半径は 0 である.

(3) 多項式  $p(t)$  に対して, 冪級数  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$  の収束半径は 1 である.

(4) 多項式  $p(t), q(t)$  に対して冪級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} x^n$  の収束半径は 1 である. ただし  $q(n)$  は負でない整数の根をもたないものとする.  $\diamond$

例 10.7. 冪級数

$$(10.4) \quad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\left( a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{n} & (n = 2m+1; m \text{ は負でない整数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \right)$$

の収束半径を求めよう.

<sup>4)</sup>d'Alembert, Jean Le Rond; 1717-1783.

無限個の  $a_n$  が 0 になるので, ダランベールの定理 10.4 は直接使えない. コーシー・アダマールの定理 10.3 を使う:

$$b_n^+ := \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geq n\} = \sup\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{k}} \mid k \geq n, k \text{ は奇数}\right\}$$

とすると, 補題 5.22 から

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

となるので, 収束半径は 1 である.

ダランベールの定理を用いて次のように収束半径を求めることもできる:  $s$  に関する冪級数

$$1 - \frac{1}{3}s + \frac{1}{5}s^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m s^m}{2m+1}$$

の収束半径は定理 10.4 から 1 なので, この級数は  $|s| < 1$  なら絶対収束,  $|s| > 1$  なら発散. いまこの級数の  $s$  を  $x^2$  で置き換え,  $x$  をかければ, (10.4) が得られるので, これは  $|x| < 1$  で絶対収束,  $|x| > 1$  で発散する. すなわち収束半径は 1 となる (命題 10.2).  $\diamond$

収束半径が  $r$  の冪級数 (10.1) の  $x = \pm r$  での挙動にはさまざまな場合がある.

例 10.8. (1) 冪級数  $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$  の収束半径は 1 であり,  $x = \pm 1$  で発散する.

(2) 冪級数  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$  の収束半径は 1 であり  $|x| < 1$  で絶対収束し,  $|x| > 1$  では発散する. さらに  $x = 1$  で  $\log 2$  に収束 (条件収束) する (例 4.3) が,  $x = -1$  では発散する (例 8.8).

(3) 例 10.7 の級数の収束半径は 1 で,  $x = \pm 1$  では  $\frac{\pi}{4}$  に条件収束する (問題 3-5, 例 10.14).

(4) 冪級数  $1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  の収束半径は 1 であり,  $x = \pm 1$  で絶対収束する (例 8.8).  $\diamond$

## 10.2 冪級数が定める関数

命題 10.1 から冪級数 (10.1) が収束する範囲  $I$  は区間となり, (10.2) は区間  $I$  上の関数  $f$  を定める. とくに, 冪級数の部分和から定まる関数  $f_n$  を用いて  $f$  を次のように表しておく:

$$(10.5) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in I); \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

補題 10.9. 式 (10.5) の状況で, 冪級数の収束半径  $r$  が正であるとする. このとき区間  $(-r, r)$  に含まれる任意の閉区間  $J$  に対して次が成り立つ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_J |f_n - f| = 0.$$

証明. 閉区間  $J := [a, b] \subset (-r, r)$  に対して,  $\delta := \frac{1}{2} \min\{r - b, a - (-r)\} > 0$  とすると,  $J \subset [-r + 2\delta, r - 2\delta]$  となる. 関数の  $J$  での上限は  $J'$  での上限を超えないから,  $J = [-r + 2\delta, r - 2\delta]$  で結論を示せばよい. あたえられた級数は  $x = r - \delta$  で絶対収束するから,  $|a_n(r - \delta)^n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). したがって,  $n \geq N$  ならば  $|a_n(r - \delta)^n| \leq 1$  となる番号  $N$  がとれる. このとき,  $n \geq N$  ならば, 各  $x \in J$  に対して

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k (r - \delta)^k| \left| \frac{x}{r - \delta} \right|^k \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{x}{r - \delta} \right|^k \leq \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho} \quad \left( \rho := \frac{|x|}{r - \delta} < 1 \right) \end{aligned}$$

となる. したがって  $\sup_J |f_n - f| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $\square$

定理 10.10. 収束半径  $r$  が正である冪級数が (10.2) で定める関数  $f$  は, 区間  $(-r, r)$  で連続である.

証明. 点  $\alpha \in (-r, r)$  をひとつ固定して,  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$  を示せばよい. まず  $d := \frac{1}{2} \min\{r - \alpha, \alpha - (-r)\} > 0$  とすると,  $\alpha$  は  $(-r + d, r - d)$  に含まれている. いま, 閉区間  $J := [-r + d, r - d]$  を固定しておく.

正の数  $\varepsilon$  を任意にとると, 補題 10.9 より, 次をみたく番号  $N$  が存在する:

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_J |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (x \in J).$$

この  $N$  に対して部分和  $f_N$  は多項式だから連続関数 (例 6.10). したがって, 次をみたく正の数  $\delta$  が存在する:

$$|x - \alpha| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f_N(x) - f_N(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

この  $\delta$  に対して  $|x - \alpha| < \delta$  なら

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\alpha)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(\alpha) + f_N(\alpha) - f(\alpha)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\alpha)| + |f_N(\alpha) - f(\alpha)| < \varepsilon \end{aligned}$$

したがって  $f$  は  $\alpha$  で連続である (注意 6.8).  $\square$

例 10.8 の (2), (3), (4) のように, 収束半径  $r$  の冪級数が  $(-r, r)$  の端点で収束する場合もあるが, 定理 10.10 は端点での連続性について言及していない. 実際, ここでの証明では  $\alpha = \pm r$  の場合には有効でない. しかし, 端点で冪級数が収束するならば, 冪級数が定める関数の連続性が言える:

定理 10.11 (アーベルの連続性定理<sup>5)</sup>). 冪級数 (10.2) の収束半径が  $r$  で,  $x = r$  ( $x = -r$ ) で (10.2) が収束するならば, 次が成り立つ:

$$\lim_{x \rightarrow r-0} f(x) = f(r) \quad \left( \lim_{x \rightarrow -r+0} f(x) = f(-r) \right), \quad \text{ただし } f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

証明はここでは与えない.

## 10.3 項別微分・積分

定理 10.10 から, 冪級数 (10.5) で定まる関数  $f$  は  $(-r, r)$  で連続なので, 積分可能<sup>6)</sup> である.

定理 10.12 (項別積分<sup>7)</sup>). 収束半径が  $r$  ( $> 0$ ) の冪級数で (10.2) のように定義される関数  $f$  と任意の  $x$  ( $-r < x < r$ ) に対して次が成り立つ:

$$\int_0^x f(t) dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

<sup>5)</sup> Abel, Niels Henrik; 1802–1829.

<sup>6)</sup> 前期に扱った (証明してはいないが) 一変関数の積分の項目を思い出そう. 連続関数の積分可能性の証明は第 11 回の講義ノートで与える.

証明．式 (10.5) のように部分和  $f_n$  をとると，補題 10.9 から

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f_n(t) dt \right| &= \left| \int_0^x (f(t) - f_n(t)) dt \right| \leq \left| \int_0^x |f(t) - f_n(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x \sup_{[-x,x]} |f(t) - f_n(t)| dt \right| \leq \sup_{[-x,x]} |f(t) - f_n(t)| |x| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで， $f_n(x)$  は  $x$  の多項式だから，積分公式が使って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{k-1}}{k} x^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n. \quad \square$$

定理 10.13 (項別微分)．収束半径が  $r (> 0)$  の冪級数で (10.5) のように定義される関数  $f$  は  $(-r, r)$  で微分可能で，次が成り立つ：

$$(10.6) \quad f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \quad (-r < x < r).$$

証明．命題 9.6 と補題 5.22 から

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

なので，コーシー・アダマールの定理 10.3 から (10.6) の右辺の級数の収束半径は  $r$  である．そこで，この級数で与えられる関数を  $g$  とおくと，定理 10.12 から  $x \in (-r, r)$  に対して

$$\int_0^x g(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

なので，微分積分学の基本定理より  $f$  は微分可能で  $f'(x) = g(x) (-r < x < r)$ ． $\square$

例 10.14. 級数

$$(10.7) \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

の和を求めよう (問題 3-5 の別解を与える)．まず定理 8.9 から (10.7) は収束することがわかる．

<sup>7)</sup>項別積分 (微分): integration (differentiation) by term and term.

いま，例 10.7 の (10.4) のような冪級数を考えると，その収束半径は 1 である．したがって定理 10.13 から

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

は区間  $(-1, 1)$  で微分可能で

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \quad (-1 < x < 1).$$

したがって

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} x \quad (-1 < x < 1)$$

であるが， $x = 1$  で級数 (10.4) は収束するのでアーベルの定理 10.11 から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \Bigg|_{x=1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} \quad \diamond$$

## 問 題 10

10-1 例 10.6 を確かめなさい．

10-2 例 10.8 を確かめなさい．

10-3 例 10.14 に倣って，級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n}$$

の和を求めなさい (例 3.11 の別解)．

10-4 例 10.14 に倣って，級数

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi + 3 \log 2)$$

であることを示しなさい (例 8.10 (3))．