# 12. テイラーの定理と極値問題

## 12.1　2 変数関数の極大値・極小値

前期に学んだ多変数関数，とくに 2 変数関数の極値問題を考えたい．まず，記号・用語の復習からはじめよう：

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書き，

$$\mathbb{R}^2 := \{(x,y)\,|\, x,\, y \text{ は実数 }\} = \{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\} = \text{「座標平面」}.$$

とする．点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ と正の数 $\varepsilon$ に対して

$$U_\varepsilon(a,b) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2\}$$

を点 $(a,b)$ の $\varepsilon$-近傍[1] という．$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U$ が**開集合**であるとは，任意の $(a,b)\in A$ に対してうまく正の数 $\varepsilon$ を選べば $U_\varepsilon(a,b)\subset A$ とできることである．また $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U$ が**連結**[2] であるとは，任意の 2 点 $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in A$ を $U$ 内の連続曲線で結ぶことができることである．これらの概念を用いて，$\mathbb{R}^2$ の連結な開集合のことを **領域**[3] という．これらの用語は前期「微分積分学第一」の第 3 回講義ノートを参照.

領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f$ が $(a,b)\in D$ で**極大値** (**極小値**) をとるとは，うまく正の数 $\varepsilon$ をとれば，任意の $(x,y)\in U_\varepsilon(a,b)$ $((x,y)\neq(a,b))$ に対して $f(x,y)<f(a,b)$ $(f(x,y)>f(a,b))$ が成り立つことである.

ここでは，1 変数関数に対する極値判定条件（定理 11.6）に相当するような 2 変数関数（多変数関数）極値判定条件を与える.

---

[*] 2015 年 1 月 21 日

[1] $\varepsilon$-近傍：an $\varepsilon$-neighborhood；開集合：an open set.

[2] 連結：connected; ここで述べた定義は正確には弧状連結性 pathwise connectedness を表しているが，$\mathbb{R}^n$ の部分集合に対しては連結性と弧状連結性は同値である.

[3] 領域：a domain.



## 12.2　2 変数関数のテイラーの定理

1 変数関数に関する定理 11.6 は，考えている点の近くでの関数の挙動をテイラーの定理（定理 2.9, 3.1）の 2 次の項までで近似することにより得られた．2 変数関数についても同様のことを考える：

**定理 12.1** (2 変数関数のテイラーの定理)**.** 2 変数関数 $f$ が $(x,y)=(a,b)$ を含む領域で $C^\infty$-級であるとする．このとき

$$\begin{aligned}(12.1)\quad f(a+h,b+k) &= f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right)+R_3(h,k)\end{aligned}$$

と書くと

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2}=0$$

が成り立つ.

**証明.** あたえられた $(a,b)$ および $(h,k)$ に対して，1 変数関数 $F(t)=f(a+th,b+tk)$ を考えると，$F$ は $[0,1]$ で $C^\infty$-級であるから，$F$ にテイラーの定理 2.9 を適用すると，

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(0)+\frac{1}{3!}F'''(\theta)\qquad(0<\theta<1)$$

となるような $\theta$ が存在する．ここで，合成関数の微分公式（チェイン・ルール[4]）を用いれば， $F(0)=f(a+0h,b+0k)=f(a,b)$,

$$\begin{aligned}F'(0)&=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\\ F''(0)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\\ F'''(\theta)&=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の式の右辺の偏微分は $(a+\theta h,b+\theta k)$ での値である．とくに $f$ は $C^\infty$-級なので，$f$ の任意の階数の偏導関数は連続である．したがって，例えば

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h,b+\theta k)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)$$

---

[4] チェイン・ルール：the chain rule, テキスト，第 1 章 3.2, 前期の講義ノート第 6 回を参照.

が成り立つ．したがって $(h,k)=(r\cos t, r\sin t)$ $(r>0)$ とおけば $(h,k)\to(0,0)$ すなわち $r\to 0$ のとき

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k)\frac{h^3}{h^2+k^2}\right)=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k) r\cos^3 t\right)\to 0$$

が成り立つ．$F'''(\theta)$ の他の項も同様に考えれば $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} F'''(\theta)/(h^2+k^2)=0$ を得る． □

**注意 12.2.** 定理 12.1 は 2 次式による $f$ の近似とみなすことができる．とくに，(12.1) の $h$, $k$ に関する 1 次の項までをとれば，1 次式による近似

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k+R_2(h,k), \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{12.2}$$

が成り立つことがわかる．

**注意 12.3.** テイラーの公式 (12.1) の右辺のうち，$h$, $k$ の 1 次の項は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = df(a,b)\boldsymbol{h} \qquad \left(\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right)$$

と表される．ただし $df(a,b)=\bigl(f_x(a,b), f_y(a,b)\bigr)$ は $(a,b)$ における $f$ の **全微分** [5] である．さらに $h$, $k$ の 2 次の項の 2 倍は，

$$(h,k)\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = {}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\, f(a,b)\boldsymbol{h}, \tag{12.3}$$

$$\text{ただし，}\qquad \mathrm{Hess}\, f(a,b) := \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$$

と表される．ただし ${}^t\boldsymbol{h}$ は列ベクトル $\boldsymbol{h}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．ここで，偏微分の順序交換定理 [6] から，$\mathrm{Hess}\, f(a,b)$ は 2 次の**対称行列** [7] となる．この行列を $f$ の $(a,b)$ における**ヘッセ行列** [8] とよぶ．

[5] 全微分：the total differential，前期の講義ノート第 5 回参照

[6] 偏微分の順序交換：前期の講義ノート第 3 回参照．

[7] 対称行列：a symmetric matrix.

[8] ヘッセ行列：the Hessian matrix; Hesse, Ludwig Otto, 1811–1874, de.



## 12.3 2 変数関数の極値判定

**定理 12.4.** $\mathbb{R}^2$ の領域 $D$ で定義された $C^\infty$-級関数 $f$ が $(a,b)\in D$ で極値をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

が成り立つ．

**証明.** 関数 $f$ が $(a,b)$ で極小値をとるならば，次をみたす正の数 $\varepsilon$ が存在する：$h^2+k^2<\varepsilon^2$ ならば $f(a+h,b+k)>f(a,b)$．とくに $|h|<\varepsilon$ のとき $f(a+h,b)>f(a,b)$ なので $F(h):=f(a+h,b)$ は $h=0$ で極小値をとる．したがって定理 11.6 から $F'(0)=f_x(a,b)$ は 0 である．同様に $G(k)=f(a,b+k)$ を考えれば $f_y(a,b)=0$ が成り立つ． □

**定理 12.5.** $\mathbb{R}^2$ の領域 $D$ で定義された $C^\infty$-級関数 $f$ が $(a,b)\in D$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

をみたしているとする．このとき，

$$\begin{aligned} \Delta &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2=\det \mathrm{Hess}\, f(a,b), \\ A &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \end{aligned}$$

とおくと，

- $\Delta>0$ かつ $A>0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極小値をとる．
- $\Delta>0$ かつ $A<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極大値をとる．
- $\Delta<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極値をとらない．

これを示すために次の補題を用いる：

**補題 12.6.** $h$ と $k$ の斉次 2 次式

$$(**)\qquad \varphi(h,k):=Ah^2+2Bhk+Ck^2 \qquad (A,\ B,\ C \text{ は定数})$$

に対して

- 任意の $(h,k)\neq(0,0)$ に対して $\varphi(h,k)>0$ となるための必要十分条件は $A>0$ かつ $AC-B^2>0$ である．
- 任意の $(h,k)\neq(0,0)$ に対して $\varphi(h,k)<0$ となるための必要十分条件は $A<0$ かつ $AC-B^2>0$ である．
- $\varphi$ が正の値も負の値もいずれもとるための必要十分条件は $AC-B^2<0$ となることである．
- それ以外（$AC-B^2=0$）の場合は，$\varphi$ は符号を変えないが，$\varphi=0$ となるような $(h,k)\neq(0,0)$ が存在する．

**証明．** 2 次式の平方完成

$$\varphi(h,k)=\begin{cases} A\left(h+\frac{B}{A}k\right)^2+\frac{AC-B^2}{A} & (A\neq 0)\\ C\left(k+\frac{B}{C}h\right)^2+\frac{AC-B^2}{C} & (C\neq 0)\\ 2Bhk & (A=C=0)\end{cases}$$

からわかる． □

**定理 12.5 の証明（いい加減バージョン）．** 定理 12.1 と仮定から

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}\varphi(h,k)+R_3(h,k),\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2}=0$$

が成り立つ．ただし $A:=f_{xx}(a,b)$, $B:=f_{xy}(a,b)$, $C:=f_{yy}(a,b)$ に対して

$$\varphi(h,k):=Ah^2+2Bhk+Ck^2$$

とおいた．$h^2+k^2$ が十分小さいときは $|R_3(h,k)|$ は $|\varphi(h,k)|$ に比べて小さいので $f(a+h,b+k)-f(h,k)$ は $\frac{1}{2}\varphi(h,k)$ で近似されるので，補題 12.6 から結論が得られる． □

## 12.4 三変数以上の場合

一般に $\mathbb{R}^n$ の領域 $D$ で定義された $C^\infty$-級関数 $f$ をベクトル $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\dots,x_n)$ に実数 $f(\boldsymbol{x})$ を対応させているとみなしておく．このとき，定理 12.1 の証明の真似をすれば，

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}+{}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}+R_3(\boldsymbol{h}),\qquad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{R_3(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2}=0 \tag{12.4}$$



を得る．ただし

$$df(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right),$$
$$\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}.$$

このとき，

**事実 12.7.**
- $f$ が $\boldsymbol{a}$ で極値をとるならば $df(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ である．
- $df(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})$ の固有値がすべて正 (負) ならば $f$ は $\boldsymbol{a}$ で極小値（極大値）をとる．
- $df(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})$ の固有値が符号を変えるならば $f$ は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない．

この事実の後半の 2 つは，次に述べる 2 次形式の性質からわかる：

実数の変数 $(x_1,\dots,x_n)$ の斉次 2 次式を ($n$ 変数の) **2 次形式**という．2 次形式は

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

の形で表される．とくに $x_ix_j=x_jx_i$ であるから，$a_{ij}$ と $a_{ji}$ が等しくなるように係数を按分することができる．すなわち 2 次形式の一般形は

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j,\qquad (a_{ij}=a_{ji}).$$

これを，列ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\dots,x_n)$ と対称行列 $A=(a_{ij})$ を用いて

$$\varphi(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}\qquad (A\text{ は実対称行列}) \tag{12.5}$$

と表すことができる．行列 $A$ を 2 次形式 $\varphi$ の**表現行列**という．

**事実 12.8** (線形代数の復習).

- 実数を成分とする対称行列の固有値は実数である.
- 実数を成分とする対称行列 $A$ は直交行列により対角化できる.

すなわち，実数を成分とする対称行列 $A$ に対して，直交行列 $P$ が存在して

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \qquad ({}^tPP = E = \text{単位行列})
$$

とできる．ただし $\mu_1,\dots, \mu_n$ は $A$ の固有値である．このことを用い，変数変換

$$
\boldsymbol{X} = {}^t(X_1,\dots,X_n) := {}^tP\boldsymbol{x}
$$

を行うと，2 次形式 (12.5) は

$$
\varphi = \mu_1 X_1^2 + \dots + \mu_n X_N^2
$$

と書くことができる．とくに

- $\mu_1,\dots, \mu_n$ がすべて正ならば，任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\varphi(\boldsymbol{x}) > 0$ が成立する．このとき 2 次形式 (12.5) は**正値**または**正定値**という.
- $\mu_1,\dots, \mu_n$ がすべて負ならば，任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\varphi(\boldsymbol{x}) < 0$ が成立する．このとき 2 次形式 (12.5) は**負値**または**負定値**という.
- $\mu_1,\dots, \mu_n$ の中に正のものも負のものも含まれているならば，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は正，負いずれの値もとる.



# 問　題　12

**12-1** 次の集合は $\mathbb{R}^2$ の領域か.

$$
\mathbb{R}^2,\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\},\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqq 0\},
$$
$$
\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\neq 1\},\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}
$$

**12-2** 補題 12.6 の証明を完成させなさい.

**12-3** $f(x,y) = x^3 - xy + y^3$ に対して

- $f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$ となる $(x,y)$ をすべて求めなさい.（ここで虚数解は考えない．なぜか）
- 上で求めた $(x,y)$ に対して定理 12.5 を適用することにより，次のことを確かめなさい：「$f(x,y)$ は $(x,y) = (1/3, 1/3)$ で極小値 $-1/27$ をとり，それ以外の点では極値をとらない.」

**12-4** 関数 $f(x,y) = (ax^2+by^2)e^{-x^2-y^2}$ の極値を調べなさい．ただし $a$, $b$ は正の定数である（テキスト 74 ページ問題 10）.

**12-5** 関数 $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ の極値を調べなさい.

**12-6** $\mathbb{R}^2$ の領域 $D$ で定義された調和関数 [9] $f$ の 2 次偏導関数 $f_{xx}$ が $D$ 上で 0 にならなければ $f$ は $D$ 上で極値をとらない.

[9] 前期の講義ノート第 2 回，演習問題 2-4 参照.