

13. 常微分方程式

一般論 未知関数 $\boldsymbol{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ に関する常微分方程式の初期値問題

$$(13.1) \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a} \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

を考える．ここで \boldsymbol{f} は \mathbb{R}^n に値をもつ $(n+1)$ -変数の関数である．成分を用いて $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$ と書けば，微分方程式 (13.1) は

$$\dot{x}_j(t) = f_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad x_j(t_0) = a_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

と連立微分方程式の形で表すことができる．ただし $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ である．

定理 13.1 (基本定理)．実数 t_0 を含む開区間 I と，点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ を含む \mathbb{R}^n の領域上 D に対して，

$$I \times D := \{(t, \boldsymbol{x}) \mid t \in I, \boldsymbol{x} \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

で定義された， \mathbb{R}^n に値をとる関数 $\boldsymbol{f}: I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $I \times D$ 上で C^1 -級であるとする¹⁾．このとき， t_0 を含む開区間 I 上で定義された C^1 -級関数 $\boldsymbol{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ で (13.1) を満たすものただひとつ存在する．

例 13.2. 定数 λ に対して，常微分方程式

$$(13.2) \quad \dot{x}(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = a$$

を考える．関数 $x(t) := ae^{\lambda t}$ は (13.2) を満たすから，定理 13.1 より (13.2) の解はこの形のものに限る． \diamond

注意 13.3. \bullet \boldsymbol{f} の微分可能性はもう少し弱めることができるが，実用上はここであげたもので十分である．しかし「連続」まで弱めることは

^{*)}2015 年 1 月 28 日

¹⁾ C^r -級なら結論として得られる関数も C^r -級である．

できない．実際，単独の微分方程式 $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$ (\boldsymbol{f} が微分可能でないケース) の初期条件 $x(0) = 0$ を満たす解は無数に存在する．実際，任意の $a > 0$ に対して

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{1}{27}t^3 & (x \geq a) \end{cases}$$

は条件を満たす．

- \bullet $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して定義されている (t を陽に含まない場合を含む) としても方程式 (13.1) の解は \mathbb{R} 全体で定義されるとは限らない．実際， $\dot{x} = 1 + x^2$, $x(0) = 0$ の解は $x(t) = \tan t$ であるが，この定義域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である．

線形微分方程式 区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された n 次正方行列に値を持つ関数 $A: I \rightarrow M(n, \mathbb{R})$, \mathbb{R}^n に値を持つ関数 $\boldsymbol{b}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して，微分方程式

$$(13.3) \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

を線形常微分方程式という．ただし $t_0 \in I$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $M(n, \mathbb{R})$ は実数を成分にもつ $n \times n$ 行列全体の集合を表している．

成分を用いて

$$\begin{aligned} A(t) &:= (a_{ij}(t)), \\ \boldsymbol{b}(t) &:= {}^t(b_1(t), \dots, b_n(t)), \\ \boldsymbol{x}(t) &:= {}^t(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

と表せば，(13.3) は

$$(13.4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

と表される．

定理 13.4 (線形常微分方程式の基本定理). 行列値関数 $A: I \rightarrow M(n, \mathbb{R})$, $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ がともに C^∞ -級であるとする. このとき $t_0 \in I$ を一つ固定すると, 任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して I 上で定義された C^∞ -級関数 $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ で (13.3) と初期条件 $x(t_0) = a$ を満たすものがただひとつ存在する.

例 13.5. 原点を含む区間 I 上で定義された C^∞ -級関数 $\alpha(t)$ と $\varphi(t)$ に対して, 微分方程式の初期値問題

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(t) = \varphi(t), \quad x(0) = c$$

を考える. この方程式の解は

$$x(t) = \left(c + \int_0^t \frac{\varphi(s)}{x_0(s)} ds \right) x_0(t), \quad x_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \alpha(s) ds\right)$$

と表される. ◇

例 13.6. 定数 α, γ に対して, 微分方程式

$$(13.5) \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \alpha x = 0$$

を考える. これは, 定理 13.1, 13.4 の形をしていないが,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$(13.6) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2\gamma \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

とかけるので, 定理 13.4 の意味で線形常微分方程式であることがわかる. とくに式 (13.3) の係数行列 $A(t)$ は t によらない定数だから, この方程式の解は \mathbb{R} 全体で定義される.

$\gamma = 0$ の場合:

- $\gamma = 0, \alpha = \omega^2 > 0$ のとき, (13.5) を満たす x は

$$(13.7) \quad x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

とかける. ただし A, B は定数である.

実際, (13.7) が方程式 (13.5) を満たしていることは直接計算でわかる. 一方, $X(t)$ が (13.5) を満たしているならば, X は \mathbb{R} 全体で定義されているので, 値 $a := X(0), b := \dot{X}(0)$ が定まる. いま $X(t) := {}^t(X(t), Y(t))$ ($Y(t) = \dot{X}(t)$) とおけば, X は方程式 (13.6) の解で $X(0) = {}^t(a, b)$ を満たす解である. 一方, (13.7) で $A = a, B = b/\omega$ とおいたものを考え, $x(t) = (x(t), y(t))$ ($y(t) = \dot{x}(t)$) とおけば, これも同じ方程式 (13.6) の初期条件 $x(0) = {}^t(a, b)$ を満たす解である. したがって, 定理 13.4 の解の一意性から $X(t) = x(t)$ でなければならぬ. すなわち $X(t)$ は (13.7) の形にかける.

- $\gamma = 0, \alpha = -\omega^2 < 0$ のとき, (13.5) を満たす x は

$$x(t) = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t$$

とかける. ただし A, B は定数である.

- $\gamma = 0, \alpha = 0$ のとき, (13.5) を満たす x は

$$x(t) = At + B$$

とかける. ただし A, B は定数である.

一般の場合は次のような解が得られる: 2 次方程式

$$(13.8) \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \alpha = 0$$

の 2 つの根を λ_1, λ_2 とする.

- λ_1, λ_2 が相異なる実数ならば, (13.5) を満たす x は

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

の形に表される. ただし A, B は定数.

- $\lambda_1 = -\gamma + i\omega, \lambda_2 = -\gamma - i\omega$ (ω は実数) とかけている場合, (13.5) を満たす x は

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

の形に表される．ただし A, B は定数．

- $\lambda_1 = \lambda_2$ (実数) の場合, (13.5) を満たす x は

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}(A + Bt)$$

の形に表される．ただし A, B は定数．

◇

線形微分方程式の解の空間 方程式 (13.3) の $b = 0$ の場合を同次方程式あるいは 斉次方程式という：

$$(13.9) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

もし, ベクトル値関数 $x_1(t), x_2(t)$ が (13.9) の解ならば, それらの線形結合

$$ax_1(t) + bx_2(t) \quad (a, b \text{ は定数})$$

もまた (13.9) の解である．

定理 13.7. \mathbb{R}^n に値をとる未知関数 $x(t)$ に関する方程式 (13.9) の解全体の集合は n 次元線形空間 (ベクトル空間) となる．

証明. すぐ上に述べたように, 解全体の集合は線形結合に関して閉じているのでベクトル空間となる. 次元が n であることは, 初期値問題の解の一意性から従う (問題 13-1 参照). □

いま, 方程式 (13.9) の解全体のなす線形空間を V_A とかく. すなわち $x \in V_A$ とは $x = x(t)$ が (13.9) を満たすことである.

定理 13.8. 線形微分方程式

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

の解 $x_0(t)$ をひとつとると, この方程式の任意の解は

$$x_0(t) + x(t) \quad x \in V_A$$

の形に表すことができる.

例 13.9. 正の定数 ω, m ($\omega \neq m$) に対して, 微分方程式

$$(13.10) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \sin mt$$

の解は

$$\frac{1}{\omega^2 - m^2} \sin mt + A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

の形に表される．ただし A, B は定数である．

◇

問 題 13

13-1 斉次線型常微分方程式 (13.9) を考える. ただし $A(t)$ は t_0 を含む開区間 I で C^∞ -級であるとする.

- (1) $x_1(t), x_2(t)$ が (13.9) の解であれば, $ax_1(t) + bx_2(t)$ もまた (13.9) の解であることを確かめなさい. ただし a, b は実数の定数である.
- (2) $x_1(t), x_2(t)$ が (13.9) の解であるとき, $x_1(t_0), x_2(t_0)$ が一次独立ならば, $x_1(t), x_2(t)$ は一次独立, すなわち

$$ax_1(t) + bx_2(t) = 0 \quad \text{がすべての } t \text{ に対して成り立つならば } a = b = 0$$

であることを確かめなさい.

- (3) 方程式 (13.9) の解全体の集合は n 次元線形空間になることを示しなさい (ヒント: \mathbb{R}^n の標準基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ に対して $x_j(t)$ を, 初期条件 $x_j(t_0) = e_j$ となる (13.9) の解とすると, $\{x_1, \dots, x_n\}$ は (13.9) の解全体の集合の基底である).

13-2 定理 13.8 を示しなさい (ヒント: 一つの解 x_0 を固定すると, 任意の解 x に対して $x - x_0$ は斉次方程式 (13.9) の解である.)

13-3 正の定数 k に対して, 線形微分方程式の初期値問題

$$(*) \quad \ddot{x}(t) = k^2 x(t) \quad x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = B$$

を考える.

- (1) 関数

$$x(t) = A \cosh kt + \frac{B}{k} \sinh kt$$

は (*) を満たすことを確かめなさい.

- (2) 方程式 $\ddot{x} = k^2 x$ の解をすべてあげなさい.

13-4 例 13.6 の各々の場合について, 解がそこに挙げられている形に限ることを確かめなさい.

13-5 $m = \omega$ のとき (13.10) の解はどうなるか.

13-6 正の定数 k, α に対して, 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = kx(\alpha - x)$$

をロジスティック方程式という²⁾. この方程式の初期条件 $x(0) = m$ を満たす解は, $m \neq 0$ のとき

$$x(t) = \frac{\alpha}{1 + \sigma e^{-k\alpha t}} \quad \left(\sigma = \frac{\alpha}{m} - 1 \right),$$

$m = 0$ のときは $x(t) = 0$ である. このことを確かめなさい. また, 解が定義される t の区間を求め, 区間の端での x の挙動を調べなさい.

²⁾ロジスティック方程式: the logistic equation.