2014 年 10 月 27 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 2

お知らせ

- ご提出いただいたご質問，コメントへの回答はこの用紙に公開しております．提出用紙にもコメントを書いていますが，これは山田個人用のメモですので，読めないかもしれません．

前回までの訂正

- 講義日程：12 月 22 日は水曜日ではなく月曜日．
- 講義資料 1, 3 ページ，下から 2 行目：あたえらえる → あたえられる

授業に関する御意見

- 黒板に書く字をもう少していねいに書いてくださると，もっと見やすい黒板になると思います．
  山田のコメント： 了解．見難いときはその場で指摘してください．あとから言うより効率的だと思います．
- 講義室横側の黒板はあまり使わないで欲しいです． **山田のコメント：** 補助的に「脇道」「余談」に使っているつもりです．
- これから半年よろしくお願い致します． **山田のコメント：** こちらこそ．
- これからよろしくお願いします．雑談っぽいのもよろしくお願いします． **山田のコメント：** お約束はできません．
- 沢山冗談を言ってください． **山田のコメント：** いや．
- あまり定期試験を難しくしないで欲しいです．
  山田のコメント： あなたにとって，ですか？ あなたにとって何が難しいのかわかりませんので，お約束はできません．
- 初回は 10 月後半にずれ込みましたが，良い意味で期待が裏切られて楽しかったです． **山田のコメント：** 何を期待してたの？
- 今日のように既知の事実を色々と引き合いに出してくださると，理解も深まるし，何より楽しいです．
  山田のコメント： 既知であってください．
- この用紙を大きくすることは難しくても，余白を少なくして，少しでも問題の解答スペースを大きくできませんか．
  山田のコメント： いやです．解答スペースを大きくしたら，沢山読まなきゃいけないじゃないですか．狭いスペースに収まるようにきちんと整理して書いてください．

質問と回答

質問： 授業中に，先生は黒板にチョークで自己交叉のあるなめらかな曲線を書き「微分幾何ではこの曲線をどう表せばいいかわからない」とおっしゃっていましたが，そこで疑問がふと生じました．確かに $\mathbb{R}^2$ において任意の曲線を式で表わすのは難しいと思います．しかし $\mathbb{R}^2$ において自己交叉もせずに後戻りもしない曲線（つまり，グラフを $y=f(x)$ とすると $\forall x\in\mathbb{R}\exists! y\in\mathbb{R}$ s.t. $y=f(x)$ となる曲線）ならば，どんな曲線でも初等関数を使った式で表すことはできないでしょうか．（書き忘れましたが，自己交叉せず，後戻りもしない なめらかな 曲線です）．

お答え： 何か「難しそうな」「格好よさそうな」言葉を使っていますが，支離滅裂ですね．「つまり」の前後が同じものを述べていません．おっしゃる通りだとすると「自己交叉せず，後戻りしない曲線」は「$y=f(x)$ のグラフ」で表されるということですね．それは嘘．高等学校で学んだ「円」は自己交叉も後戻りもしませんが，関数のグラフで表せない，ということはよくご存知のはずです．また，「関数のグラフで表せる」ということと「初等関数を使った式で表せる」ということの関係が全くわかりません．初等関数でない関数のグラフはどう考えればよいのでしょう．
ついでに (1) 「微分幾何では...わからない」とは言っていないと思います．微分幾何では表されたものを扱いますから．(2) 送り仮名が「表わす」と「表す」と統一されていません．一つの文脈では統一すべきです．(3) 「書き忘れましたが」とありますが，試験の答案ではないので，まず書く内容を考えてからまとめるべきです．

質問： 今回の授業では，三角形を例にとって「同じ」という概念について言及していましたが，微分幾何で扱う曲線や曲面などにおける「同じ」とみなす概念はどのようなものがありますか．また，微分幾何のモチベーションについて，シラバスに記載されていること以外で何か教えていただけると嬉しいです．

お答え： 前半：合同．後半：最後まで授業を聴いてください．モチベーションというのは実は最後まで見ないとわかりません．あるいはリーマンの原論文（日本語訳がでています）などを読んでみるとよいかと思います．

質問： 講義中に先生は「一般的な図形を記述するにはどうするか」という風なことを仰っていたと思いますが，例えば $\mathbb{R}^2$ 上の図形は黒板の上にその図形を描いてそれで「記述」したことにはならないのでしょうか．

お答え： (1) 黒板は $\mathbb{R}^2$ ではありません．$\mathbb{R}^2$ （座標平面）は実在しません．座標平面の “イデア” を考えているのです．したがって，黒板に描いた図形は $\mathbb{R}^2$ の図形ではありません．その「およその形が想像できるように」似せて描いているのです．(2) 描いた絵そのものが図形だとすると，その性質を数学的に調べる手段は何でしょうか．

質問： 3 角形を 3 次元で考えると，1 つを定めるのに 9 つの値が必要で，自由度は 3 になると思いますが，回転，平行移動，折り返しでそれぞれいくつずつ自由度が減るのでしょうか．

お答え： 合同な三角形を同じと考えると自由度 3 ということですね（これは平面と同じ）．したがって，空間の合同変換の自由度は 6 でなければなりません．折り返しは回転・平行移動の組み合わせに，たとえば xy 平面に関する折り返しを組み合わせればよく，本質的に 1 通りしか必要ないので，自由度は減りません．平行移動の自由度は 3 ですから，回転の部分の自由度は 3 になります．なぜ 3 になるか，考えてご覧なさい．

質問： $\mathbb{R}^2$ では三角形は 6 つの値（各頂点の (x, y) 座標）があれば表わせて，でも合同な三角形を同じとしたら 3 つで . . . というのがおもしろかったです．

お答え： どうも．

質問： 連続であるが至るところで微分不可能な関数に弧長は定義できますか．

お答え： まず「関数」に「弧長」は考えられません．「関数のグラフ」の弧長ならわかりますが．連続かつ至るところで微分不可能な曲線の弧長は定まることも定まらないこともあります．弧長が定まる連続曲線を rectifiable といいます．

質問： 直交行列 A について，$\det A$ の付号（原文ママ，符号のことか）の違いが係る行列 A としての（線形変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ としてでなく）重大な性質の違いはありますか．

お答え： 例えば固有値．

質問： 微分幾何，位相幾何が在るとのことでしたが，位相幾何の方はどういった内容なのでしょうか．

お答え： 位相幾何またはトポロジー，文庫・新書で検索してみましょう．一般的な入門書が見つかります．たぶん一晩で読めます．

質問： $\{$ 微分幾何学 $\} \cap \{$ 位相幾何学 $\} = \emptyset$ ですか?

お答え： 数学の分野は決して disjoint ではありません．大きくみれば一つと思うこともできます．分野の名前は「どちらかというとこの辺」というもので，「ここまでが縄張り」というようなかっちりしたものではありません．

質問： 質問：f: isometry $\Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, A: n 次直交行列) の証明が知りたい．

お答え： $\Leftarrow$ は当たり前（これくらい自分で示してね）．$\Rightarrow$ は講義資料の問題 1-3.

質問： 解析学の英訳の語源は何ですか?

お答え： Analysis ですか? 手元の辞書では “to break up” とあります．ギリシア語 $\rightarrow$ ラテン語と来ているようです．

質問： 解答を作るときに $\det(AB) = \det A \det B$ など今までにやったことはすべて既知として用いていいのでしょうか．

お答え： こんなものはもちろん既知でなければいけません．どこまで既知としてよいかは文脈で判断してください．

質問： 等長変換の色々な具体例を知りたいです．

お答え： $\mathbb{R}^n$ の等長変換はどんな形になりますか? 直交行列と定ベクトルを含んだ形になりますね．それらに具体的な値を入れれば具体例は沢山できませんか? とくに $n = 2$ なら直交行列の形は全部知っているはずですね．

質問： 授業内での「図形の表示のしかた」のところに関して $\varphi : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \ni t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \in S^1$ とおくと φ は $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ と S^1 の同相写像でいいですか?

お答え： $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ にどのように位相を入れるかによって決まるのでは? 通常は，この写像が同相写像になるように $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に位相を入れるのだと思います．

質問： 単位用の図示（原文ママ：単位円の表示のことか）で $\left\{ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \right\} \cup \{(-1, 0)\}$ とありましたが，$t \to \pm\infty$ で $(-1, 0)$ を示すことができますか?

お答え： そりゃあできるでしょう：

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1,\quad \lim_{t\to-\infty}\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1,\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{1+t^2}=0,\quad \lim_{t\to-\infty}\frac{2t}{1+t^2}=0$$

ですよね．これが示せないとなるとそれなりに問題では?

質問： 集合論によると $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ には全単射が存在しますが，それを用いれば，パラメーターの数の足し算，引き算というのは意味を成さないはずです．でも現実には意味をなしているのは，連続性や位相に関する「何か」が欠けているからだと思うのですが， やはりそのような操作をすると「何か」を保たないのですか? あと $\mathbb{R}^2$ 上で等長変換はパラエータの数でいうと，原点をどこに移すかで 2，$(1,0)$ をどこに移すかで，原点の移った先を中心とする半径 1 の円の円周上のどこを 1 と，さらに折り返しがあるかないかで，全部で $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$, $\{0,1\}$ の 3 つのパラメータと 1 つの 2 択で等長変換は決まりますが，この 2 択（一般には有限択）は，パラメータの数を厳密にギロンするとどうなりますか.

お答え： 前半：微分同相で保たれる性質として「次元」があります．多様体を学ぶともうすこしきちんと説明できるかと思います．後半：2 択は「0 次元」で，連続的に変形できないので，パラメータの数には数えません.

質問： $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視し通常の位相をいれるという点があまりしっくり来ません．行列をベクトルの一般化と考えるならば自然であるとは感じますが，なんとなく行列の持つ構造が損なわれてしまうような気がしています．もし，この感覚が正しいのであれば，そういう位相（距離）でメジャーなものがあると思うのですが，仮にあるならばどのようなものがあるのか教えてください.

お答え： $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視したときのユークリッド距離は，$A\in\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ に対して $||A||:=\sqrt{\operatorname{tr}{}^tAA}$ とし，$d(A,B)=||B-A||$ とおくことにより定まる距離と一致します．このように書くと「行列の性質をそれなりに反映している」ように見えませんか? 行列のノルムには，この他にも $||A||_1=\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}|$, $||A||_\infty=\max\{|a_{ij}|\,|\,1\leqq i,j\leqq n\}$ などがあります（$A=(a_{ij})$）が，これも $\mathbb{R}^{n^2}$ で普通に使う距離ですね．これらの距離は同じ位相を定める，というのは「集合と位相」の演習問題です.

質問： $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, $n=2,3$ なら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ を定義すれば，余弦定理を用いて $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum a_ib_i$ を導けることは高校でやりましたが，n 次元では $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum a_ib_i$ は両方定義するということでしょうか.

お答え： 同じ文脈で，一つの対象を 2 つ以上の方法で定義することはありません．よく使われる筋書きは $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum a_ib_i$ と 定義 し，これを用いて $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を $\cos^{-1}\bigl(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|)\bigr)$ と定めるというものです．なす角が定義できるためには $\cos^{-1}$ を取る前の値が区間 $[-1,1]$ に入る必要がありますが，これを保証するのがシュワルツの不等式.

質問： 集合と位相第二で，連結とコンパクトはまだやっていないです． **お答え：**了解.

質問： 毎回，今回くらいの分量の配布物があるのでしょうか． **お答え：**多分.

質問： 特になし． **お答え：**me, too.

2 平面曲線の表示

■関数のグラフ

- なめらかな（C^∞-級の）関数のグラフはなめらかな曲線である.
- 関数グラフがなめらかな曲線であってもその関数がなめらかであるとは限らない.
- 曲線のなめらかさの「定義」.

■陰関数表示

- 「曲線 $F(x,y)=0$」という文の意味.
- 曲線 $F(x,y)=0$ が，点 (x_0,y_0) のまわりでなめらかな曲線になるための十分条件.

2014 年 10 月 27 日

- 陰関数表示の特異点.
- 関数のグラフは陰関数表示とみなせること.

■パラメータ表示

- パラメータ表示 $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$.
- パラメータ表示の正則性と特異点.
- 自己交叉：パラメータ表示では特異点でない場合がある.
- パラメータ変換.
- 関数のグラフはパラメータ表示とみなせること.
- 極座標表示された曲線.

■弧長

- 曲線の長さの定義.
- パラメータ表示された曲線の弧長.
- 弧長の不変性.

問題

2-1 原点をひとつの焦点にもち，もうひとつの焦点が x 軸の負の部分にあるような楕円は，極座標 (r, θ) を用いて $r = \dfrac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}$ と表示されることを示しなさい．ただし $\varepsilon \in [0, 1)$ は離心率，a は正の定数である．$\varepsilon = 1, \varepsilon > 1$ の 場合にこの式は何を表すか.

2-2 次のような xy 平面上の曲線のパラメータ表示を求めなさい：曲線上の点 P において曲線に引いた接線と y 軸との交点を $\mathrm{Q} = (0, t)$ とするとき線分 PQ の長さが一定 a で，かつその曲線は点 $(a, 0)$ を通る．ただし，パラメータは Q の y 座標 t を用いなさい.

2-3 xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を，x 軸上に滑らないように転がすとき，放物線の焦点はどのような曲線を描くか.

2-4 正の整数 m を用いて極座標表示された曲線 $r = \cos m\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を図示し，それと同じ長さをもつ楕円を求めなさい.

2-5 区間 $I = [a, b]$ 上で定義された C^∞-級関数 f のグラフを C とする：$C = \{\bigl(x, f(x)\bigr) | x \in I\}$. I の任意の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^{N} d(\mathrm{P}_{j-1}, \mathrm{P}_j) \qquad \Bigl(\mathrm{P}_i = \bigl(x_i, f(x_i)\bigr), i = 0, 1, 2, \ldots, N\Bigr)$$

とおく．ただし，d は $\mathbb{R}^2$ のユークリッド距離を表す．このとき，

$$(*) \qquad \sup\{\mathcal{L}_\Delta \,|\, \Delta \text{ は } I \text{ の分割 }\} = \int_a^b \sqrt{1 + \bigl(f'(x)\bigr)^2}\, dx$$

となることを示しなさい.（ヒント：平均値の定理，積分の定義，連続関数の積分可能性.）