2014 年 11 月 6 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

# 幾何学概論講義資料 3

## 前回の補足

- 前回の講義では，いくつかの絵をお見せしました．これには gnuplot というフリーのグラフ作成ソフトウェアを用いています．使用したスクリプトは講義 web ページにあげておきます．
  http://www.gnuplot.info
  チュートリアルとしては次が便利：
  http://ayapin-film.sakura.ne.jp/Gnuplot/gnuplot.html
- 今回は，曲線の数値データを作るに GNU Octave という数値計算ソフトウェアを用いています．
  https://www.gnu.org/software/octave/
- 曲線や曲面の描画をするには有償のものを含め，たくさんのものがありますが，ここでは，フリー・オープンソースであり，定評のあるものを用いてみました．

## 前回までの訂正

- Cassinian oval の部分でいくつか間違いがあったので訂正しておきます：

$$F(x,y) = -\{(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2\} + c^2 \qquad (a>0; c \geqq 0)$$

に対して

$$F_x = -4x(x^2+y^2+a^2) + 8a^2x, \qquad F_y = -4y(x^2+y^2+a^2)$$

なので，

$$(F_x, F_y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow (x,y) = (0,0), \quad \pm(a,0).$$

したがって，$\{(x,y) | F(x,y) = 0\}$ 上に $(F_x, F_y) = 0$ となる点があるためには
  - $c = a^2$; このとき，原点が特異点で，図形はレムニスケートになる．
  - $c = 0$; このとき図形は 2 点からなる．

これ以外で $F(x,y) = 0$ は（自己交叉のない）なめらかな曲線を与える．

## 授業に関する御意見

- 情報の新しい黒板を上にあげていただけるとうれしいです． **山田のコメント：** 上にあげると書けなくなりますが. . .
- 授業も，先生の書かれた教科書も，わかりやすいです． **山田のコメント：** 本当?
- 先週は提出する問題を間違えてしまってすみませんでした．以後気をつけます. . . orz **山田のコメント：** Don't mind.
- 既に授業で取り扱う予定かも知れませんが，一般の座標系におけるラプラシアン，ナブラを系統的に導出する事もやってもらえたら幸いです．
  **山田のコメント：** いまのところ予定には入れていませんが，時間があったらやるかもしれません．
- 特にない． **山田のコメント：** me, too.

## 質問と回答

**質問：** 授業では，なめらかな曲線のパラメータ表示の定義域について言及はなかったと思いますが，暗黙の了解として，定義域を $\mathbb{R}$ の空でも一元でもない連結集合としているのでしょうか?

**お答え：** 区間としましょう．

**質問：** 「特異点」というのは具体的にどのような定義があるのですか．授業では，曲線の特異点という話をしていましたが，他の分野でもこの語が使われているような気がします．その違いについても教えて下さい．

**お答え：** 「曲線の陰関数表示 $F(x,y)=0$」の特異点は $F_x=F_y=0$ となる点，「曲線のパラメータ表示 $\gamma(t)$」の特異点は $\dot{\gamma}=0$ となる点．「. . . の特異点」の . . . ごとに定義が違います．複素関数論で現れる特異点はまた別のものですね．

**質問：** 陰関数表示の特異点で，曲線が自己交叉している場合は， パラメータ表示でなめらかな曲線とされるような場合でも，なめらかでないということになるのでしょうか．それとも特異点では何が起こるかわからないと仰っていましたし，他の表示でなめらかかどうかの判定がされる場合は，それに準じるということでいいのでしょうか?

**お答え：** なので，今回は「なめらかな曲線」という言葉を多用しましたが，今後はあまり使いません．

**質問：** 同じ曲線なのに，パラメータ表示では，自己交叉するところが特異点でない場合があるというのがよく納得できませんでした．

**お答え：** どう納得できないのでしょう．ここでは「パラメータ表示の特異点」「陰関数表示の特異点」という言葉の使い方しかしないようにします．

**質問：** 特異点について，入れる位相を変えたら除去できるものがあったりするのではと思いました（あまり考えてないので大嘘かも知れません)．特異点の性質を調べる方法として，例えばどういうものがあるのでしょうか．

**お答え：** 前半：特異点は「位相」に関連する性質ではなく「可微分構造」に関する性質なので，たしかに同相な図形でも特異点をもったり持たなかったりします．たとえば $C=\{(x,y)|y^2=x^3\}\subset\mathbb{R}^2$ は原点に特異点をもちます．ここで $\varphi\colon \mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto(\xi,\eta)=(x^3,y)\in\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への同相写像ですが，$\varphi$ による $C$ の像は $\{(\xi,\eta)|\eta^2=\xi\}$ と放物線になって特異点を持ちません．後半：時間があれば紹介します．

**質問：** 「正則なパラメータ表示」の「正則な」の意味がわかりませんでしたが $\dot{\gamma}(t)\neq(0,0)$ のことを指しているのでしょうか．

**お答え：** そうです．

**質問：** レムニスケートで $\tan\theta=\sin t$ としましたが，これは単純に図形を分析しやすくするためなんでしょうか．他の方法 (e. g. $\tan\theta=\cos t$ or $\tan\theta=t$) を使っても問題ないんでしょうか．

**お答え：** きれいなパラメータ表示ができれば何でもいいわけです．試してご覧なさい．

**質問：** 卵形線というのは，凸集合の境界ですか．

**お答え：** 定義としてはそうです（テキストの付録 B-2 参照)．Cassinian oval は「カッシニの卵形線」と訳されることが多いですが，実は卵形線でない場合がありますね．

**質問：** 板書された $\dot{x}(t_0)\neq0\Rightarrow\dots$, $\dot{y}(t_0)\neq0\Rightarrow\dots$ の説明がわかりませんでした．

**お答え：** テキスト 6 ページ．

**質問：** 曲線がなめらかというのは少しだけ理解しましたが，関数がなめらかとは簡単に式が書けるということですか?

**お答え：** いいえ．$C^\infty$-級のことです．

**質問：** 講義中に，定数関数は何回でも微分可能と説明されていましたが，そこのところがよくわからなかったので，もう一度説明を詳しくお願いします．

**お答え：** 講義で述べたのは「多項式は何回でも微分可能」．とくに「定数関数は何回でも微分可能」であるのは，当たり前と思いますが，違いますか?

**質問：** 今回の問題はとても難しく感じました．テストを受ける時点でこのレベルの問題は解けるようになっていなくてはいけませんか?

**お答え：** 難しいのはよかった．大学 2 年生にまでなって，易しい問題だけを考えているんじゃつまらないですものね．試験は「過去問を見てください」．難しくないとは思いますが，あまり易しくするのも皆さんに失礼と思います．バランスが微妙ですね．

**質問：** 好きな曲線は何かありますか?

**お答え：** 好き嫌いはないほうです．

**質問：** 明らかに「$y = f(x)$ と $y$ が $x$ の関数で表示できる事」⇒「$F(x, y) = 0$ はなめらかである」は偽であると思いますが，（例えば "尖った" 関数の存在）このことを考えると，陰関数定理の主張（「$F_y$ (or $F_x \neq 0$) なら $U$ 内では $y = f(x)$ と表示できる」）だけからでは，$F(x, y) = 0$ がなめらかであるという事が言えないように思います．これは，仮定より $F_y$ (or $F_x$) が 0 であるので，偏微分可能であるような状況のみを考えている（つまり "尖った" 関数は考えていない）という理解で良いのでしょうか?

**お答え：** よくありません．「陰関数定理」（テキスト 165 ページの定理 1.6）をご覧なさい．あなたが書いた事実にはない言葉が書いてありますね：“$C^\infty$-級”．これを見逃してはいけません．講義でも「なめらかな曲線」とは，各点の近傍でなめらかな ($C^\infty$-級の) 関数のグラフと合同であること，と述べています．ちなみに「関数」は「対応の規則」です（と中学校で習ったはずです）から，それが「尖っている」という言葉には強い違和感を感じます．「関数のグラフが尖っている」というなら（厳密な定義はともかく）意味が通じますが．

## 3 弧長パラメータと曲率 (テキスト §2)

**■弧長パラメータ表示**

**■曲率・曲率円**

**■フルネ方程式**

**■曲線論の基本定理**

**■全曲率と回転指数**

## 問題

**3-1** 懸垂線 $y = \cosh x$ に対して

(1) その弧長パラメータ表示を求めなさい．

(2) 曲率の定義から，弧長パラメータ $s$ の関数として曲率を求めなさい．

(3) 上の結果とパラメータ変換の式を用いて曲率を $x$ の関数で表しなさい．

(4) 一般の助変数表示に対する曲率の公式（テキスト 13 ページの式 (2.7)）を用いて懸垂線の曲率を求め，上の結果と一致することを確かめなさい．

**3-2** レムニスケート

$$\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t}\right) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

の弧長関数を $s = s(t)$ とし，弧長パラメータでの表示を $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq L = s(2\pi))$ とする．$\gamma(s)$ の曲率関数を $\kappa(s)$ とするとき積分 $\displaystyle\int_0^L \kappa(s)\,ds$ の値を（計算により）求めなさい．

**3-3** 陰関数 $F(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$ で与えられる曲線 $C$ を考える．

(1) $C$ 上の全ての点は，陰関数表示 $F$ の特異点ではないことを確かめなさい．

(2) $C$ の曲率の絶対値が最大・最小となる点とそこでの曲率の絶対値を求めなさい．

(3) 曲率の符号はどのように定めればよいか．

**3-4** パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ の $t = t_0$ での速度ベクトルを $\boldsymbol{e}$, 接線を $l$ とする．もし，$t_0$ での $\gamma$ の曲率が正（負）ならば，$t_0$ の近くで $\gamma(t)$ は $\boldsymbol{e}$ に向かって $l$ の左（右）側にある．このことを示しなさい．曲率が 0 の場合はどうか．

**3-5** 弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における曲率が 0 でないとする．このとき， 3 点 $\gamma(s_0) = P$, $\gamma(s_0+t) = Q_t$, $\gamma(s_0-t) = R_t$ を通る円 $C_t$ は $t \to 0$ とすると $s_0$ における $\gamma$ の曲率円になることを示しなさい．

---

2014 年 11 月 6 日