2014 年 11 月 10 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 4

授業に関する御意見

- 問題が難しいので OCW へのアップを早めるようにお願いするつもりでしたが，早くしてもらっても解けることにつながらないことがわかりましたので，お願いはしないことにしました．
  山田のコメント： 了解．
- 昨年も言いましたが，このプリントが，時間的，内容的に難しすぎます．
  山田のコメント： 昨年も言いましたが，よかったね．大学に来てまで易しいことばかりやっていてはつまらないものね．
- 特になし． **山田のコメント：** me, too.
- 特には **山田のコメント：** はい．

質問と回答

質問： $\boldsymbol{e}'(s)$ が $\boldsymbol{n}(s)$ の実数倍で表されることについては $\boldsymbol{e}'\cdot\boldsymbol{e}=0$ から納得しました．$\boldsymbol{n}'(s)$ が $\boldsymbol{n}(s)$ と直交することはわかるのですが，$\boldsymbol{e}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ に対して $\boldsymbol{n}'(s)=-\kappa(s)\boldsymbol{e}(s)$ と符号が異なることについては（説明を聞き逃したのか）理由がわかりませんでした．

お答え： $\boldsymbol{e}(s)$ が s の変化とともに左に回っていくならば，その変化 $\boldsymbol{e}'(s)$ は $\boldsymbol{n}(s)$ と同じ向きを向くので $\kappa(s)>0$．これは $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{e}$ に対して左を向いていることによります．$\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{n}\}$ は正規直交基なので $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{e}$ と同じ速さで同じ向きに回転しますが，$\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{n}$ に対して右を向いているので，たとえば $\kappa>0$ のときは，$\boldsymbol{n}'$ は $\boldsymbol{n}$ に対して左向き，すなわち $\boldsymbol{e}$ の反対向きを向きます．

式による説明：$\boldsymbol{n}'$ は $\boldsymbol{n}$ に直交するから $\boldsymbol{e}$ と平行．そこで $\boldsymbol{n}'=\alpha\boldsymbol{e}$ (α はスカラ) とおくと，

$$\alpha=\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e})'-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}'=-\boldsymbol{n}\cdot(\kappa\boldsymbol{n})=-\kappa.$$

質問： $\boldsymbol{n}(s)$ は，一般的に単位接ベクトルから見て左向きの単位法ベクトルとして定義され，右向きの法ベクトルを基準とすることはないのですか．だとしたらそれには何か理由があるのですか．

お答え： 右向きをつかってもよいですが，それは多分特殊なケースなので明示的に断らなければなりません．左向きを基準にすることが多いのは (1) 普通，座標平面では x 軸から y 軸へは反時計回り（左回り）に 90° 回転したもの．$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{n}$ も同じ関係にするのが自然では？ (2) $\boldsymbol{n}$ は曲線の方向 $\boldsymbol{e}$ の変化する向きの基準です．$\boldsymbol{e}$ が反時計回りに回るとき，その変化が $\boldsymbol{n}$ の方向だと嬉しくないですか．(3) ほぼ (2) と同じですが，この講義のように曲率を定義すると，反時計回り（正の向き）に回る円の曲率が正になります．正の向きに回る円の曲率が負になるのは「筋の悪い」定義ですよね．

質問： (1) パラメータ表示 (2) 合同変換 と題して授業をすすめていましたが，(2) の方の議論の方針がうまくつかめませんでした．教えて下さい．

お答え： 「中華思想」のくだりです．

質問： $\mathbb{R}^2$ の曲線を一意に決定するのに必要な最低限の情報は (1) 曲率関数 (2) $\gamma(0)$ (3) $\gamma'(0)$ の 3 つですか? (2) が平行移動，(3) が回転を決めているように思います．

お答え： そうです．

質問： 問題 2-3; $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,p^2)$ が転がして x 軸に重なったとき，焦点 $(0,\frac{1}{4})$ は $(\frac{1}{4}\log 2(p+\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}),\frac{1}{4}\sqrt{4p^2+1})$ に来ると導きましたが正しいでしょうか．

お答え： 正しく見えます．この $(x,y)=$ (ご回答の式) から p を消去するとどうなるでしょう．

質問： 弧長パラメータの逆関数が C^∞ 級になるのはどうしてですか?

お答え： 逆関数定理から．

質問： フルネ方程式を行列で書いたときの，行列 Ω は曲線を一回折り返すと $-\Omega$ が導かれますか?

お答え： 曲線を折り返すと，曲率の符号が変わりますね．そうすると Ω はどうなりますか？

質問： $\mathbb{R}^2$ 上で γ や $\dot\gamma$ などを列ベクトルとみなすか，または行ベクトルとみなすかは場合によりますか？教科書では両方を混用しているように見えますが.

お答え： 混用します（と第 1 回に説明した気がする）．文脈から明らかに判断できると思いますが，とくに「行列を掛ける」という文脈では列にするのが普通です.

質問： カテナリー $y = \cosh x$ の $x = 0$ での曲率は 1 なので，$(0, 1)$ で最もこれを近似する円は $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ であるということですか．$y = f(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ (円の下半分は)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - f(x)}{x^2} = (\text{中略}) = 0$$

ということで 2 次の近似になっているのだと思います.

お答え： OK ですが，実はもっと高次の近似になっています.

質問： ベクトルの微分について，何か直感的でわかりやすい幾何学的なイメージはありますか（曲線についての接線の傾きのような).

お答え： 「曲線についての接線の傾き」は「関数のグラフの接線の傾き」のことを言っていますか? （違いはわかりますよね.）お答え：速度ベクトル．十分直観的（ご質問の漢字と違うことに注意）であると思いますし，講義中にも何度もこのイメージを使いました.

質問： 弧長パラメータは $s = \int_{t_0}^t |\dot\gamma(u)|\,du$ を求めるときの $t_0 \in I$ は任意でいいのですか？どのようにとるのが一般的ですか?

お答え： 弧長は定数の差をのぞき一意ですが，t_0 を動かすとその定数が変わります．どの t_0 をとっても本質的に同じなので，計算がやりやすいようにとればよいです．もっとも，何がやりやすいかは個人の好みによりますね.

質問： 授業で出ていたフレネル積分や有名なガウス積分などは，どうして初等関数で表せないことがわかるのですか?

お答え： 証明されているから（という答えを期待している質問？）山田もきちんとフォローしているわけではないのですが，本質的には Liouville によるのだと思います.

質問： 曲線の長さが初等関数で表すことが出来るか出来ないかはどのようにして判別することが出来るのでしょうか.

お答え： 与えられた関数の原始関数が初等関数となるかどうかを一般論として判定する条件はないと思います．初等関数になるか，ならないかを知識として知っているか知らないか.

質問： 積分が初等関数で表せないものが多いので，弧長は求められないことが多いと言っていましたが，その場合，弧長パラメータ表示に変換して考えることは難しそうに思うのですがどうでしょうか?

お答え： だから具体的には書かないで，「弧長パラメータに変換した」と宣言する．抽象的な議論の使いどころはこういうところ.

質問： $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))$ はどうして γ のフレームと呼ぶんですか.

お答え： 「枠」（フレーム）はベクトル空間の「基底」を表しています．各 s ごとに $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$ が $\mathbb{R}^2$ の（正規直交）基底を与えることによるようです.

質問： Frenet 方程式 $\frac{d\mathcal{F}}{ds}\mathcal{F}\Omega$ の Ω はなぜ Ω で表されるのでしょうか.

お答え： さあ，あまり標準的な記号はないと思うのですが，強いて言えば「接続係数」を ω^i_j と書くのですが，それと関連していないこともないようです．この授業の範囲をはるかに超えますので，これくらいで.

質問： $\gamma(s)$, s, t などの変数や関数がでてきましたが，それぞれ何を指しているのかが分かりにくかったです．黒板で，弧長パラメータと弧長パラメータ表示は何を指していたのですか.

お答え： 質問が分かりにくいです．「黒板で」だけでは何がなんだか．「弧長パラメータ s によって曲線が弧長パラメータ表示される」という状況です．記号の意味は，すくなくとも最初には説明しているので，そこまで立ち戻るとわかりにくいことはないと思うのですが，具体的に「どういう情報があればわかりやすい」と思いますか？

質問： スクリプトの f の上手な書き方があれば教えて下さい.

お答え： 黒板に書くものの真似をしましょう.

質問： クロソイドという曲線は初めて聞いたのですが，興味深い曲線だなと思いました.

お答え： ですよね.

質問： 数学とは?

お答え： 山田にとっては飯のたね．君は?

4 空間曲線

■平面曲線の全曲率と回転数 (前回の積み残し)

■空間曲線の曲率と捩率

■フルネ・セレの公式と曲線論の基本定理

- フルネ枠 $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$/ フルネ・セレの方程式/ 曲線論の基本定理

■曲率・捩率の図形的な意味

- 平面曲線となるための必要十分条件/ブーケの公式.

■今回用いる事実 以下の事実を用いる．これは，付録 A-2 の「線形常微分方程式の基本定理」からの帰結である：

定理. 区間 I の点 $t_0 \in I$ を一つ固定する．区間 I で定義され，n 次正方行列に値をとる C^∞-級関数 $\Omega(t)$ が与えられたとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}$ で,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}(t_0) = I = n \text{ 次単位行列} \tag{4.1}$$

をみたすものがただひとつ存在する.

系. 上の定理の状況で，さらに n 次正方行列 A が与えられているとする．このとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}_A$ で,

$$\frac{d\mathcal{F}_A}{dt} = \mathcal{F}_A\Omega, \qquad \mathcal{F}_A(t_0) = A \tag{4.2}$$

をみたすものがただひとつ存在する.

証明： (4.1) を満たす $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_A = A\mathcal{F}$ (行列の積) とおけば，それが求めるものである.

2014 年 11 月 10 日

問題

4-1 曲率が一定な球面曲線は円である．

4-2 半径 a の球面上の曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長) の捩率が 0 でないとき，曲率 κ と捩率 τ は

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = a^2$$

を満たす．

4-3 空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s_0)$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s_0)$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s_0)$ がそれぞれ x, y, z 軸の正の方向を向き，$\gamma(s_0) = 0$ となるような座標系をとる．このとき，$s = s_0$ の近くでの曲線の像の xy 平面，yz 平面，zx 平面への正射影はどのような形になるか，図示しなさい．ただし s_0 における曲率と捩率はともに正の値をとるとする．

4-4 弧長でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率，捩率が

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}, \qquad \tau(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

で与えられているとする．

- ある一定な単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\gamma'(s)$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角が一定であるようなものが存在することを示しなさい．
- この $\boldsymbol{v}$ に対して，$\gamma(s)$ の，$\boldsymbol{v}$ の直交補空間への正射影 $\gamma^* = \gamma(s) - \bigl(\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v}\bigr)\boldsymbol{v}$ はどんな曲線か．

4-5 原点を中心とする半径 1 の球面上の曲線 $\sigma(t)$ ($|\sigma| = 1$) が $\det(\sigma, \dot\sigma, \ddot\sigma) \neq 0$ を満たしているとする．このとき，

$$(*) \qquad \gamma(t) := \int^t (\sigma(u) \times \dot\sigma(u))\, du$$

とおくと，γ は 0 でない曲率をもち，捩率が 1 となる曲線となる．逆に，曲率が 0 にならず，捩率が 1 となるような曲線 γ に対して，ある球面上の曲線 σ で (*) を満たすものが存在する．（ヒント：$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b}$）